Capitolo 3: Automi cellulari

In questo capitolo introdurremo la nozione di **automa cellulare** (AC), sulla quale si basano molti modelli di sviluppo delle città e anche modelli di sistemi complessi presenti in altre discipline. Una delle idee fondamentali del concetto di automa cellulare è quella di riuscire a ricostruire il comportamento complesso di un sistema a partire da semplici regole che descrivono l'interazione delle "micro-componenti" in cui si pensa suddiviso il sistema stesso. Si potrebbe quindi dire che l'idea di base degli AC è di tentare di descrivere un sistema complesso non "dall'alto" usando complesse equazioni, ma simulandolo mediante interazioni di celle che seguono semplici regole, e lasciare così che la complessità emerga da queste interazioni.

Mediante modelli basati su automi cellulari sono stati affrontati problemi di varia natura; tra questi possiamo citare quelli legati allo studio dei movimenti dei pedoni in città, il problema del traffico dei veicoli o problemi di natura più schiettamente matematica come l'esistenza di macchine in grado di riprodurre se stesse o problemi di diffusione, come ad esempio lo studio della miscelazione di due liquidi diversi[1].

Gli automi cellulari sono nati alla fine degli anni '40 grazie al lavoro dei matematici Stanislaw Ulam (1909-1984) and John von Neumann (1903-1957)[2]; il loro iniziale scopo era di studiare da un lato macchine in grado di auto riprodursi e dall'altro macchine in grado di computare un qualsiasi algoritmo se opportunamente inizializzate (le cosiddette "macchine universali").

Un successivo importante sviluppo, anche con una particolare attenzione alle possibili applicazioni, si è poi avuto negli anni '80. In particolare i lavori del fisico inglese Stephen Wolfram (1959-) hanno contribuito alla diffusione degli AC. Gli automi cellulari sono stati applicati dapprima nelle scienze della natura (ad esempio in fisica, in chimica, in biologia, in ecologia e in geologia) poi anche in quelle economico-sociali e, a partire dalla fine degli anni '80 pure nello studio dello sviluppo morfologico urbano e territoriale.

Nelle righe precedenti abbiamo parlato di "micro-componenti" che interagiscono tra di loro mediante regole semplici. Per rendere più concreto il discorso facciamo un esempio riferendoci alle applicazioni degli automi cellulari allo sviluppo del territorio. In questo caso

[1] Si veda ad esempio Wolfram S., *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific, Singapore 1986 e i riferimenti in esso contenuti.
[2] In Wolfram S, opera cit.

le “micro-componenti” possono essere costituite dai singoli terreni nei quali è possibile scomporre il territorio. L’evoluzione nel tempo dell’utilizzo dei terreni dipende da una serie di fattori tra i quali, per esempio, si possono considerare:

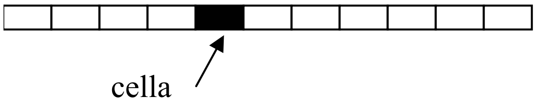
— **Fattori sociali**: articolazione sociale della popolazione, scelte legate a fattori culturali….
— **Qualità del terreno**: pendenza, restrizioni legali alla costruzione, relazioni tra la qualità della vita e la tipologia degli edifici, zone a elevato rischio sismico, …
— **Fattori climatici** per quanto riguarda, per esempio, il tipo di costruzioni.
— **Fattori economici**: prezzo degli affitti, prezzo del terreno o fattori economici che indichino il grado di espansione industriale della città, …
— **Fattori locali**: se intorno ad un terreno libero abbiamo una grossa presenza di industrie, molto probabilmente in tale terreno sarà costruita un’altra industria e non, per esempio, una zona di verde pubblico. Se vicino al terreno libero abbiamo una ferrovia, avremo allora una bassa probabilità che in tale terreno verrannno costruite delle abitazioni, …

E’ abbastanza evidente che, per quanto complessi, i fattori elencati sopra possono essere studiati e compresi con buona approssimazione uno separatamente dall’altro. L’effetto dell’azione combinata di tutti questi fattori nello spazio e nel tempo è invece molto meno controllabile e prevedibile. La teoria degli automi cellulari ha precisamente lo scopo di colmare il gap che esiste tra questi due livelli della descrizione del territorio e delle leggi che lo governano.

L’idea del concetto di automa cellulare è, come già accennato prima, quella che da interazioni locali semplici scaturiscono comportamenti globali complessi. Nei seguenti paragrafi introdurremo le principali componenti che costituiscono un generico automa cellulare.

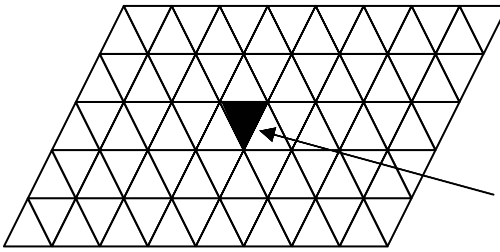
3.1 – Il reticolo Γ

Consideriamo un insieme Γ di “cellule” (o “celle”). Chiamiamo Γ “reticolo” perché un caso particolare, che storicamente ha avuto un ruolo importante, è quello in cui Γ è un reticolo regolare infinito.

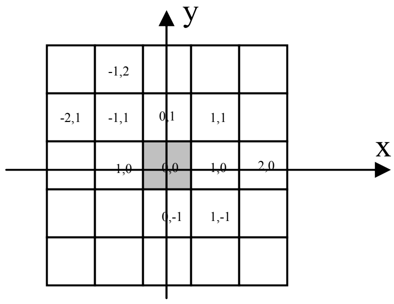
• sulla linea: $\Gamma = \mathbb{Z}$ = numeri interi, positivi, nulli o negativi ad. esempio .....  .....

cella

• nel piano: Γ = tassellazione del piano con triangoli, quadrati o esagoni



cella



cella individuata dal suo centro di coordinate (0; 0)

• nello spazio: $\Gamma = \mathbb{Z}^3$

In generale Γ è infinito, ma può consistere anche di una parte finita di tali reticoli, come nelle figure sopra, oppure di parti non tutte della stessa dimensione e forma.

Una cella del reticolo $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ad esempio è uno dei più piccoli quadrati che compongono $\mathbb{Z}^2$, e può essere individuata (guardando $\mathbb{Z}^2$ come sottoinsieme del piano) dal suo centro (la scelta della "maglia unitaria" in questi Γ non è essenziale, ma è presa per comodità).

Più in generale ogni cellula in un reticolo regolare può essere univocamente individuata assegnandole d numeri interi che possono individuare, per esempio, le coordinate del centro. Nel caso monodimensionale basta stabilire quale cella etichettare con 0 e in quale direzione mettere i numeri positivi:

…	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	…	(2.1)

Nel caso bidimensionale basta stabilire quale cella etichettare con (0; 0) e quali sono le due direzioni positive (come in un sistema di assi cartesiani, si veda ad esempio la precedente figura con il reticolo quadrato).

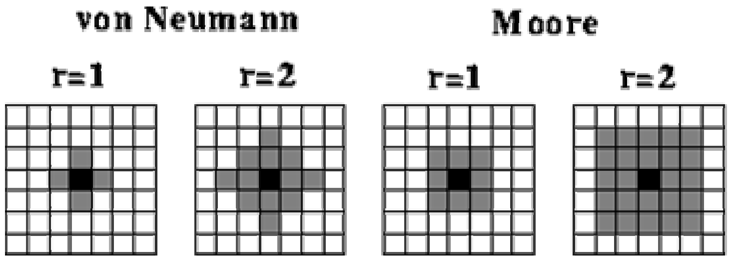
3.2 - Gli intorni

Sia Γ un reticolo come nel paragrafo precedente. Per ogni cella $i \in \Gamma$ si definisce un certo insieme $U(i)$ di altre celle, chiamato "intorno di i". Questi intorni sono importanti perché nella dinamica che sarà spiegata nel capitolo 3.4, si assume che una qualsiasi cella $i \in \Gamma$

interagisca solo con le celle del suo intorno $U(i)$. Spesso si prende per $U(i)$ l'insieme degli immediati vicini di $i \in \Gamma$, includendo la stessa cella i.

Nel caso monodimensionale (con $\Gamma = \mathbb{Z}$) possiamo avere $U(i) = \{i-1, i, i+1\}$, per esempio facendo riferimento alla figura (2.1) abbiamo $U(2) = \{1,2,3\}$.

I tipi di intorni maggiormente considerati sono quelli di von Neumann e di Moore, di seguito rappresentati per il caso bidimensionale per due valori distinti del raggio:



Se $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, ogni cella i è rappresentata da d numeri interi $(i_1, i_2, \ldots, i_d)$. La definizione generale degli intorni di von Neumann è

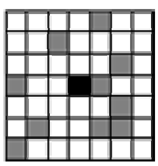
$$U(i_1, \ldots, i_d) = \{(j_1, \ldots, j_d) \ : \ |j_1 - i_1| + \ldots + |j_d - i_d| \le r\}.$$

mentre quella degli intorni di Moore è

$$U(i_1, \ldots, i_d) = \{(j_1, \ldots, j_d) \ : \ |j_1 - i_1| \le r \ \text{ e } \ldots \text{ e } \ |j_d - i_d| \le r\}$$

dove $r > 0$ è il raggio dell'intorno. Nel caso monodimensionale $d = 1$ le due definizioni coincidono.

Per specificare un generico intorno (celle grigie) della cella i (cella nera) come nel seguente reticolo



occorre in generale dare le coordinate di ogni cella facente parte dell'intorno stesso. Nei problemi di urbanistica gli intorni possono variare molto da cella a cella. Per questa ragione sono spesso inadatti gli AC che prevedono tipologie di intorni indipendenti dalle celle.

Prendere un reticolo infinito come $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ ha vantaggi per certi aspetti teorici; però presenta un ovvio problema di implementazione pratica con il calcolatore. Per questo si considerano reticoli Γ con un numero finito di celle (come nelle figure precedenti). Come vedremo si specificheranno in seguito delle interazioni tra variabili associate ai punti di Γ , che coinvolgono per esempio le celle vicine ad una cella data. Diventa quindi importante definire il "bordo" di Γ.

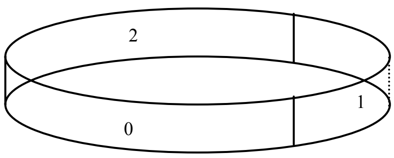
Elenchiamo nel seguito alcune fra le scelte più frequenti:

a) **Identificazione dei bordi (sistema periodico)**

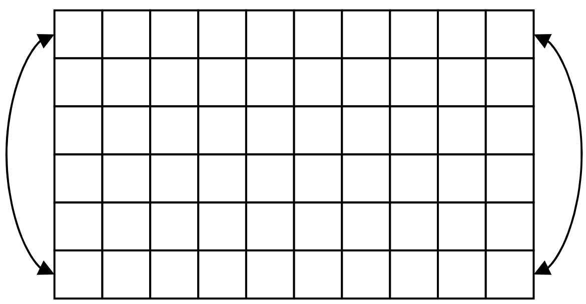
Possiamo spiegare l'idea, nel caso monodimensionale, con la seguente figura

…	0	+1	+2	0	+1	+2	0	+1	…

Ossia il reticolo Γ consiste dei punti 0, 1, 2… ripetuti in modo periodico come indicato sopra. In altre parole è come pensare le sole celle distinte (0, 1, 2 nel precedente caso) poste su un "cilindro" o, ancora, immaginare tali celle disegnate su una striscia di carta i cui bordi opposti siano poi tra loro incollati.



Nel seguente caso bidimensionale lo stesso tipo di idea può essere applicato facendo coincidere i lati opposti e ottenendo quindi quella figura matematica che si chiama toro.



b) **Riflessione delle celle di bordo**

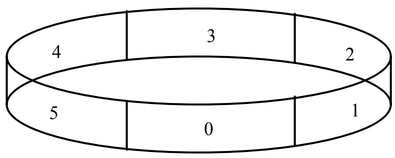
Consideriamo per esempio il caso $\Gamma = \{0,1,2\} \subset \mathbb{Z}$ ("segmento finito" di $\mathbb{Z}$). Nel caso di riflessione delle celle del bordo distinguiamo tra celle "interne" e celle di "bordo": nel seguente caso la cella 1 è interna mentre le celle 0 e 2 sono di bordo:

…	0	0	0	0	+1	+2	+2	+2	…	(2.2)

Come espresso in modo simbolico dal disegno, lo stato delle celle a sinistra (destra) della cella 1 avranno sempre lo stesso stato della cella di bordo 0 (2).

Per la definizione degli intorni delle celle di bordo, nel caso in cui Γ sia finito, bisogna stare attenti ai seguenti casi:

I. nel caso di identificazione dei bordi (§ 3.1 a) conviene pensare le celle poste su un "cilindro".



se si considerano i "primi vicini" allora abbiamo per esempio $U(0) = \{5,0,1\}$, $U(1) = \{0,1,2\}$, $U(5) = \{4,5,0\}$.

II. Nel caso della riflessione dei bordi (§ 3.1.b), facciamo riferimento per semplicità alla figura (2.2); possiamo dire che $U(1) = \{0,1,2\}$, $U(0) = \{0,1\}$, $U(2) = \{1,2\}$ e che tutte le rimanenti celle vanno considerate vere e proprie copie delle celle 0 e 2, quindi con gli stessi intorni sopra specificati.

3.3 - L'insieme degli stati

Ad ogni cella è attribuito uno "stato", che esprime una sua qualità. Gli stati sono punti di un insieme finito (nei modelli più comuni) o numerabili o un sottoinsieme della retta, ad esempio un segmento o, come nel modello ACME, la semiretta $[o, +\infty)$.

Chiameremo S l'insieme degli stati, detto anche "spazio degli stati" o "alfabeto". Nel seguito useremo inoltre le seguenti notazioni:

$\sigma_i \in S$: "stato della cella *i*", prende valori in un insieme finito S

Di seguito alcuni esempi di possibili stati in diversi campi:

— In sociologia la cella i potrebbe indicare il luogo di abitazione di un individuo ed il suo stato σ_i alcune sue qualità, ad esempio σ_i = (età, colore dei capelli, nazionalità, …).

— Un semplice caso si ha quando $S = \{0,1\}$, dove lo stato 1 potrebbe indicare "cella occupata" e lo stato 0 "cella libera"; in sociologia potrebbe significare "individuo occupato o disoccupato"

— In un dato territorio lo stato di una cella potrebbe essere rappresentato dal numero di animali ivi presenti o dal tipo di copertura forestale (per esempio "bosco", "coltivato", "erba" o un dato numerico indicante il numero di piante di un certo tipo).

— In urbanistica lo stato di una cella potrebbe essere rappresentato dall'utilizzo maggiormente presente in tale cella. In altre parole se σ_i = "abitazioni private", allora si intende che nella cella i l'utilizzo maggiormente presente è rappresentato proprio da abitazioni private.

  Un altro possibile stato usato in urbanistica è dato da grandezze con più componenti ("vettori") del tipo ad esempio (a,i,l,c,v,γ), dove i primi 5 numeri rappresentano la percentuale della superficie della cella occupata rispettivamente da abitazioni, industrie, suolo libero, attività commerciali e verde pubblico. Il numero γ indica invece il costo del terreno edificabile. Si noti che se si vincolano le variabili a,i,l,c,v,γ ad assumere valori appartenenti ad un insieme finito, allora l'insieme S di tutti i possibili stati è ancora finito.

  In urbanistica nello stato di una cella può essere interessante mettere anche misure relative alla densità di popolazione, eventuali restrizioni legali nell'uso del territorio o la qualità del suolo. È inoltre normale considerare una serie di "stati fissi", non aventi cioè nessuna evoluzione temporale, come presenza di fiumi, laghi, zone ad elevata pendenza o protette dal punto di vista ambientale.

3.4 - Le regole di evoluzione o di transizione

Si introduce una "dinamica" nel modello, cioè delle regole per precisare come gli stati delle celle evolvono nel tempo.

Le regole di evoluzione descrivono il passaggio dallo stato $\sigma_i(t)$ = "stato della cella i al tempo t" a quello $\sigma_i(t+1)$ al tempo $t+1$. Si noti, quindi, che il tempo in un AC è per ipotesi discreto $t = 0,1,2,3,...$ (per esempio "1" può corrispondere a un'ora ma anche ad un anno).

Infine la regola di evoluzione viene assunta dipendere solo dagli stati $\sigma_j(t)$ per $j \in U(i)$, cioè solo dagli stati delle celle j "vicine a i" (nel senso di appartenenti all'intorno prefissato $U(i)$ di i.

Concretamente se gli intorni sono tutti costituiti da n celle, allora le regole di evoluzione di un automa cellulare sono date da una funzione

$$\rho : S^n \to S$$

che agli stati delle n celle presenti nell'intorno di una cella fa corrispondere lo stato successivo (ricordiamo che S^n denota l'insieme delle n-uple $(s_1, ..., s_n)$, con $s_i \in S$).

Nel fissare le regole di evoluzione qualora il reticolo abbia bordi bisognerà tenere conto di come il bordo è stato definito (ad esempio periodico o con riflessione). Un caso che si presenta in applicazioni in urbanistica, dove si ha la necessità di limitarsi ad un'area finita, è quello di tenere il "bordo costante". In questo caso si stabilisce che lo stato del bordo non ha nessuna evoluzione temporale (conviene allora fissare tale stato costante ad un valore particolare che indichi "stato non significativo"). Considerare un bordo senza evoluzione temporale vuol quindi dire che la zona del territorio rappresentata dal bordo non rientra in realtà nell'area di studio e che quindi la simulazione andrà guardata solo "lontano dal bordo". In realtà questo tipo di scelta va ben analizzata, perché assumere un bordo costante non è senza conseguenze sullo stato delle celle interne. Questo tipo di condizione al bordo è particolarmente naturale per i cosiddetti "gas models" in cui il bordo viene ad avere l'interpretazione del recipiente che contiene un gas opportunamente simulato dall'AC.

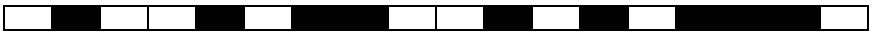
Quando si scelgono bordi costanti, occorre distinguere tra celle interne e di bordo nella definizione degli intorni. Per le celle di bordo non è importante definirne un intorno, perché esse non hanno evoluzione. Per le celle interne, invece, occorrerà fare in modo che l'evoluzione non dipenda dallo stato delle celle di bordo, proprio perché questo è ritenuto "non significativo".

3.5 – Esempi di automi cellulari

Nel seguente paragrafo verranno presentati alcuni esempi di automi cellulari. I primi due esempi hanno più che altro lo scopo di esemplificare i concetti introdotti nei paragrafi precedenti, mentre quelli successivi sono alcuni fra i più noti ed utilizzati tipi di automa cellulare.

3.5.1 – Esempio 1

Un classico esempio di AC monodimensionale è il seguente:

.....  ..... (2.3)

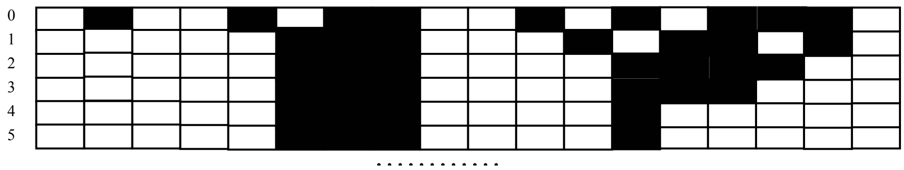
Lo spazio degli stati è $S = \{\text{bianco, nero}\}$.
L'intorno $U(i)$ è costituito dagli immediati vicini di i: $U(i) = \{i-1, i, i+1\}$.
La regola di evoluzione è la seguente:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_i(t) = \text{"nero"} \\ \sigma_{i+1}(t) = \text{"bianco"} \\ \sigma_{i-1}(t) = \text{"bianco"} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i(t+1) = \text{"bianco"}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_i(t) = \text{"bianco"} \\ \sigma_{i+1}(t) = \text{"nero"} \\ \sigma_{i-1}(t) = \text{"nero"} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i(t+1) = \text{"nero"}$$

in tutti gli altri casi $\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t)$ ("invariato")

In altre parole la cella i cambia stato solo se i suoi vicini sono entrambi di stato opposto rispetto al suo. L'evoluzione a partire dalla condizione iniziale rappresentata in figura (2.3) è la seguente:



Prima di tutto si suppone che tutte le celle non indicate siano in stato "bianco". Il numero 0, 1, 2, …, 5 rappresenta il tempo a cui si riferisce la riga orizzontale vicina. Per seguire l'evoluzione dell'automa in base alla precedente regola occorre ricordare che l'automa evolve in modo "sincrono", cioè come se tutte le celle al tempo t evolvessero contemporaneamente, in parallelo, al tempo $t+1$. Per vedere quale sarà l'evoluzione dal passo 0 al passo 1 occorre considerare una qualsiasi cella e il suo intorno al tempo 0, usare quindi la regola di evoluzione per capire quale sarà lo stato al tempo 1 della cella considerata. Si ripete il procedimento per tutte le altre celle, sempre facendo riferimento alla situazione al tempo 0 per decidere quale sarà il suo stato al tempo 1. Gli stati già decisi al tempo 1 non influenzano in alcun modo l'evoluzione delle altre celle dal tempo 0 al tempo 1.

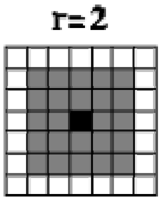
3.5.2 – Esempio 2

Consideriamo uno spazio cellulare bidimensionale $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ (o una porzione finita di $\mathbb{Z}^2$, ma allora bisogna precisare le condizioni al bordo) per rappresentare una città. Scegliamo il seguente elenco come stati possibili delle celle:

1. spazio libero
2. abitazione
3. industria
4. attività commerciale
5. ferrovia
6. strada
7. acqua
8. spazio verde pubblico

In questo caso abbiamo che $S = \{1,...,8\}$.

Possiamo ora, attraverso lo spazio cellulare, dare una rappresentazione "funzionale" di una città, cioè una rappresentazione dove ogni cella indica il tipo di utilizzo del territorio. A questo punto scegliamo, ad esempio, come vicini di una cella quelli dell'intorno di Moore di raggio 2



Consideriamo la seguente regola per l'evoluzione degli stati delle celle:

i. se lo stato della cella $\sigma_i(t)$ non è "spazio libero" allora $\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t)$
ii. Se invece $\sigma_i(t)$="spazio libero", allora

— Si trovano gli stati maggiormente presenti nell'intorno della cella.

— Se vi è uno solo di tali stati s allora si ponga $\sigma_i(t+1) = s$.

— Se viceversa diversi stati $s_1,...,s_k$ sono presenti in maggior numero rispetto agli altri, allora si scelga a caso e con uguale probabilità 1/k uno stato s_j tra gli stati $s_1,...,s_k$ e si ponga $\sigma_i(t+1) = s_j$.

In altre parole in questo semplice modello solo le celle nello stato "spazio libero" subiscono una reale evoluzione. La regola di evoluzione cambia lo spazio libero nello stato che più frequentemente è presente nell'intorno della cella. Se vi sono differenti stati presenti in maggior numero rispetto agli altri, allora la regola di evoluzione è aleatoria. Questo è un esempio di "automa cellulare stocastico" (o "aleatorio" o "probabilistico"): le regole di transizione non fissano in modo deterministico lo stato futuro di una cella, ma si limitano a indicarne la probabilità con cui lo stato di una cella si trasformi in un certo modo.

3.5.3 – Game of Life

L'automa cellulare "Game of Life" è stato inventato dal matematico inglese John Conway ed è sicuramente uno degli esempi più conosciuti di AC. L'automa è bidimensionale $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, con intorni di Moore di raggio 1 e con due soli stati V, M , detti "vivo" e "morto" e rappresentati graficamente con due colori. Le regole di evoluzione sono di tipo "semitotalitario"[3] nel senso che dipendono dallo stato della cella e dal numero di celle vive presenti nell'intorno della cella stessa (indipendentemente dalla loro configurazione, interessa solo il loro numero e lo stato della cella stessa). La seguente tabella indica le regole di transizione:

	Numero di celle vive$(t) =: c_v(t)$ nell'intorno di i								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_i = \mathrm{M}$	M	M	M	V	M	M	M	M	M
$\sigma_i = \mathrm{V}$	M	M	V	V	M	M	M	M	M

(I valori $\sigma_i(t+1)$ si leggono nella casella con il doppio bordo.)

Essa ci dà lo stato $\sigma_i(t+1)$ della cella i al tempo $t+1$ in funzione dello stato $\sigma_i(t)$ al tempo t e del numero $c_v(t)$ di celle vive presenti nell'intorno.
Concretamente se la cella è viva e ha intorno 2 o 3 celle vive, allora rimane viva; se invece è morta e ha intorno esattamente 3 celle vive, allora diventa viva anch'essa; in tutti gli altri casi la cella diventa o resta morta.

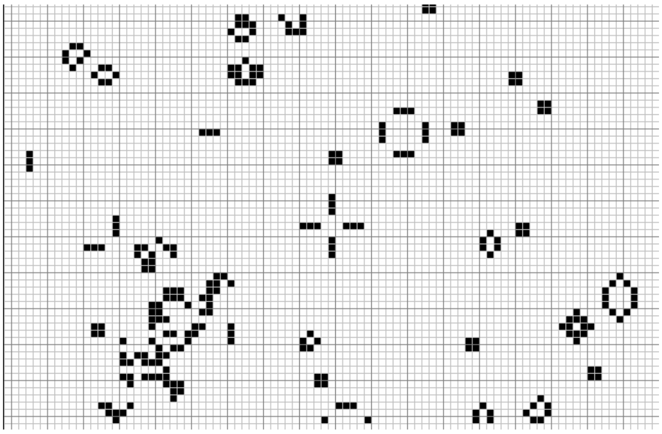
L'interpretazione più diffusa è la seguente: le celle rappresentano una qualche forma di vita che per riprodursi ha bisogno di esattamente 3 esemplari vivi

$$\sigma_i(t) = \mathrm{M} \text{ e } c_v(t) = 3 \quad \Rightarrow \quad \sigma_i(t+1) = \mathrm{V}.$$

Si ha una situazione di stabilità se la cella è viva e nel suo intorno vi sono 2 o 3 celle vive. Negli altri casi la cella muore per isolamento (meno di 2 celle vive nell'intorno) o per

[3] Le regole vengono dette "totalitarie" quando invece non dipendono dallo stato della cella ma solo da un opportuno conteggio delle celle nell'intorno.

sovrappopolamento (più di 3 celle vive nell'intorno). In figura è mostrata una tipica configurazione di Life:



3.5.4 – Modello di segregazione di Shelling

Il modello di segregazione di Schelling del 1971[4] nasce dalla considerazione che le carte demografiche di quasi tutte le aree metropolitane degli USA presentano facilmente zone con prevalenza di una sola etnia, cioè che risulta difficile trovare zone in cui non ci sia almeno il 75% di abitanti tutti appartenenti alla stessa etnia. Questo modello mostra come si possano formare delle zone di convivenza basate sulla preferenza delle persone di vivere con persone della stessa etnia. Si noti che tali zone di convivenza nascono dalle dinamiche dei singoli individui e non a partire dal "decreto di una autorità centrale"[5].

In questo esempio Γ è finito, l'AC ha intorni di tipo Moore di raggio 1, tre stati (le due "etnie" e lo stato "cella libera") e condizioni al bordo periodiche. La dinamica avviene secondo la seguente regola:

1. fisso un modo per scegliere una coppia di celle con stati diversi (tale scelta può essere fatta in modo aleatorio o deterministico, il caratteristico comportamento finale rimane lo stesso).
2. scelgo quindi una coppia di celle. Supponiamo che entrambe siano occupate.
3. analizzo gli intorni di tali celle e valuto la "felicità" di ogni cella. La "felicità" di una cella è data dal numero di vicini nello stesso stato.
4. confronto la "felicità" calcolata con quella di soglia (per esempio la cella è sufficientemente felice se più di un terzo dei suoi vicini è del suo stesso tipo)

---

[4] Schelling Th.C., *Dynamic Models of Segregation*, Journal of mathematical Sociology, 1, pp.143-186, 1971

5. se entrambe le celle sono sotto la “felicità” di soglia (quindi vorrebbero cambiare) e se lo scambio delle celle porta a non diminuire la loro “felicità”, allora scambio gli stati delle celle, altrimenti le lascio come sono.
6. se invece una sola delle due celle estratte è occupata, allora le scambio se ciò porta ad un aumento della felicità della cella occupata estratta.
7. tutte le altre celle vengono lasciate come sono; al passo successivo scelgo un’altra (in generale) coppia di celle.

Descritto nel modo precedente in realtà il modello di Schelling prevede regole che dipendono da una funzione esterna (la scelta di coppie di celle). Si parla allora di “automa cellulare esogeno”.

L’evoluzione della configurazione da una condizione iniziale data, seguita al calcolatore, mostra il formarsi abbastanza rapido di “zone di segregazione” dipendenti dalle condizioni iniziali.

3.5.5 – Il modello di Greenberg-Hastings

Il modello di Greenberg-Hastings del 1978[6] è un semplice AC usato nella modellazione dei cosiddetti “mezzi eccitabili”. Un esempio è dato da una foresta pensata in funzione della sua capacità di incendiarsi: la foresta può essere in uno stato di quiete (cioè potenzialmente incendiabile), oppure può essere in corso un incendio a cui seguirà uno stato di ricrescita della vegetazione. (Anche il funzionamento di un muscolo o alcune reazioni chimiche seguono questo semplice schema).

Possiamo costruire un AC che modellizza questo tipo di processi se consideriamo tre stati: “quiete”, “incendio”, “in recupero”. L’evoluzione avviene su un reticolo regolare bidimensionale, ed è caratterizzata dalle seguenti regole:

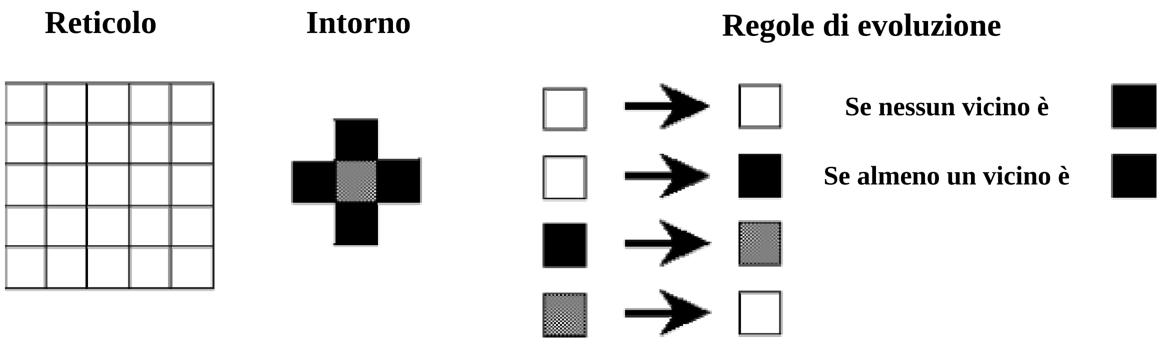
1. una cella in riposo rimane tale finché uno dei suoi vicini non s’incendia. In tal caso anch’essa diventa incendiata.
2. una cella incendiata passa sempre in stato di recupero al passo successivo.
3. una cella in stato di recupero passa sempre in stato di qiete al passo successivo.

[5] Al seguente sito web è possibile visualizzare l’evoluzione del modello di Schelling: http://www-eco.enst-bretagne.fr/~phan/complexe/schellingfr.html

[6] Greenberg J.M., Hastings S.P., *Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media*. *SIAM J. Appl. Math.*, 34(3):515–523, 1978.

Quindi la dinamica dal tempo t al tempo $t+1$ è la seguente:

- quiete → quiete se nessun vicino è “incendiato”
- quiete → incendiato se almeno un vicino è “incendiato”
- incendiato → in recupero
- in recupero → quiete



Per definire completamente l’automa manca la scelta del tipo di intorno che, a seconda dei casi può essere un intorno di von Neumann o di Moore di raggio 1 o 2.

3.6 – Osservazioni generali

1) Un interessante problema che frequentemente si presenta studiando gli automi cellulari è quello del comportamento al limite (o asintotico), vale a dire per $t \to +\infty$. Uno studio sperimentale condotto da S. Wolfram (1986) sembra abbia trovato solo quattro possibilità base:

i. Il sistema raggiunge uno stato globale “fisso” s_i dopo un tempo T (o si scompone in sottoinsiemi con questo comportamento)

$$\sigma_i(t) = s_i \qquad \forall t \geq T$$

ii. Il sistema ha un comportamento periodico di periodo P dopo un tempo T (o si scompone in sottoinsiemi con questo comportamento)

iii. Il sistema ha un comportamento differente dai precedenti due. A sua volta questo caso può essere differenziato in un generico ma “regolare” e un altro “caotico” (in questo caso si presentano spesso configurazioni con strutture “frattali”).

Riuscire a classificare in modo rigoroso, e non in modo solo “sperimentale”, il comportamento asintotico di un AC generico è ancora un problema aperto nella teoria dei sistemi dinamici (per automi particolari ci sono tuttavia già dei risultati).

2) La nostra presentazione è stata fatta parlando di celle su reticoli regolari. Già abbiamo menzionato che per molte considerazioni la forma particolare di Γ non è importante. Importante è invece la scelta dei vicini e della dinamica. I reticoli sono usati solo perché con essi è più facile dire quali sono i vicini di una cella. Per esempio in geografia le celle in genere hanno confini non banali, legati a regole nazionali o provinciali o di tipo amministrativo. Oppure in sociologia la vicinanza può voler dire “affinità”, una qualità che può essere totalmente disgiunta dalla vicinanza nello spazio $\mathbb{R}^d$.