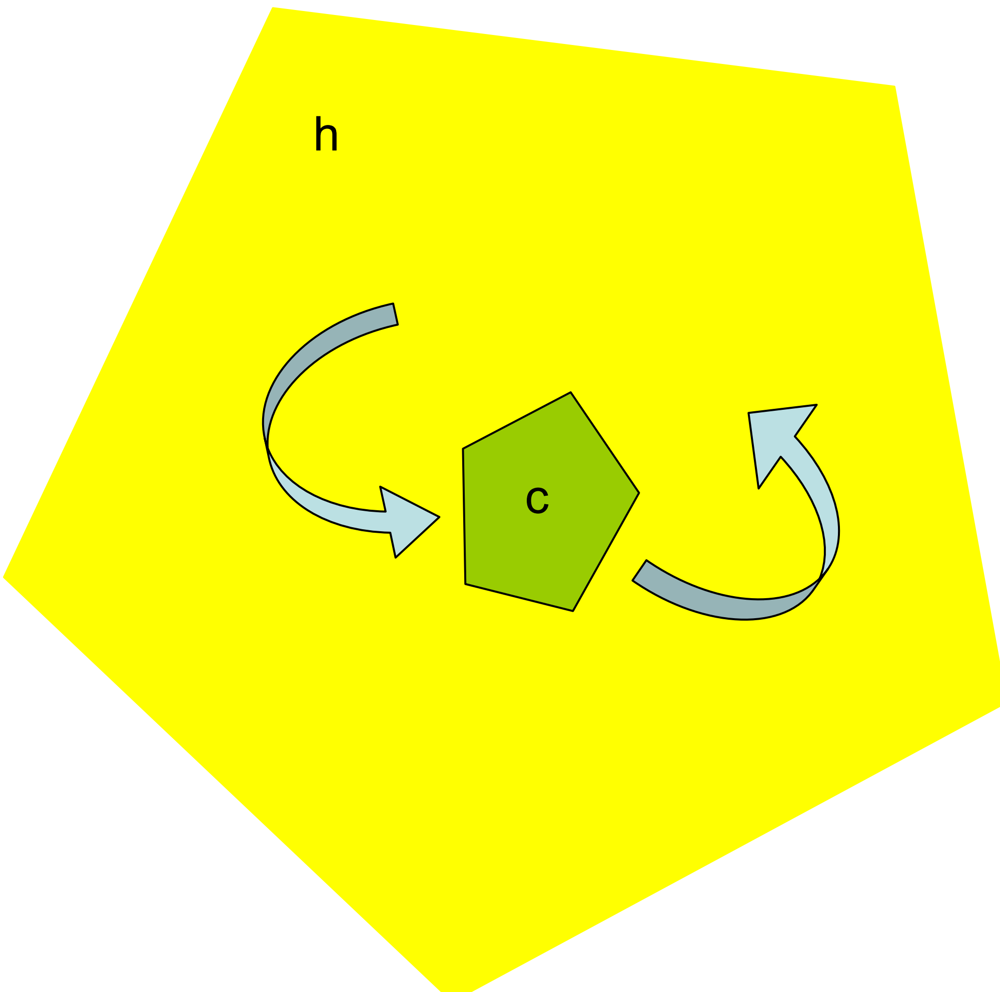
Un modello matematico per i processi di urbanizzazione

L'approccio della socio-dinamica

1 – Descrizione idealizzata di un sistema urbano
2 – Esempi di evoluzione stocastica
3 – Sistemi simmetrici e rottura spontanea di simmetria
4 – Processi di urbanizzazione
5 – Descrizone degli stati di equilibrio del sistema
6 – Equazione differenziale per il valore medio della popolazione

1 - Descrizione idealizzata di un sistema urbano



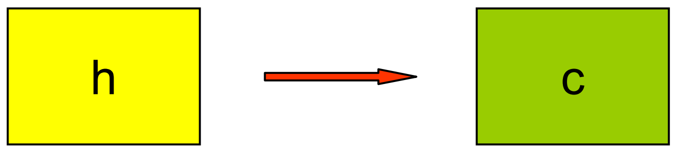
$$\begin{cases} N = n_c + n_h \\ n = n_c - n_h \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_c = \dfrac{1}{2}(N+n) \\ n_h = \dfrac{1}{2}(N-n) \end{cases}$$

$$-N \leq n \leq N$$

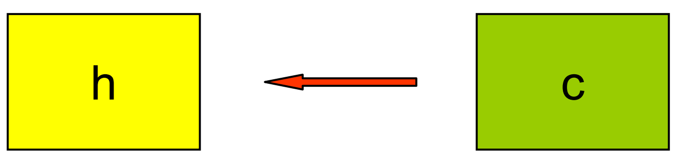
Flussi migratori

$$\begin{cases} n_c = n_c + 1 \\ n_h = n_h - 1 \end{cases}$$



$$\Phi_{h \to c} = \frac{\Delta n_{h \to c}}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} n_c = n_c - 1 \\ n_h = n_h + 1 \end{cases}$$



$$\Phi_{c \to h} = \frac{\Delta n_{c \to h}}{\Delta t}$$

Processi decisionali

I due flussi migratori sono la conseguenza di decisioni prese dati un insieme di agenti: gli abitanti della regione considerata. Le opzioni in gioco nel processo decisionale sono in questo caso due:

i) Vivere nell'area rurale
ii) Vivere nell'area urbana

La descrizione di questi processi decisionali comporta due momenti:

i) Descrizione matematica dell'utilità che un individuo trae da ciascuna delle due opzioni

ii) Connessione tra la valutazione dell'utilità e il comportamento dello individuo

Funzioni di utilità

$$U_c(n_c) = \alpha_c + \beta_c \cdot n_c$$

$$U_h(n_c) = \alpha_h + \beta_h \cdot n_h = \alpha_h + \beta_h \cdot (N - n_c)$$

$$\alpha_c, \alpha_h \geq 0$$

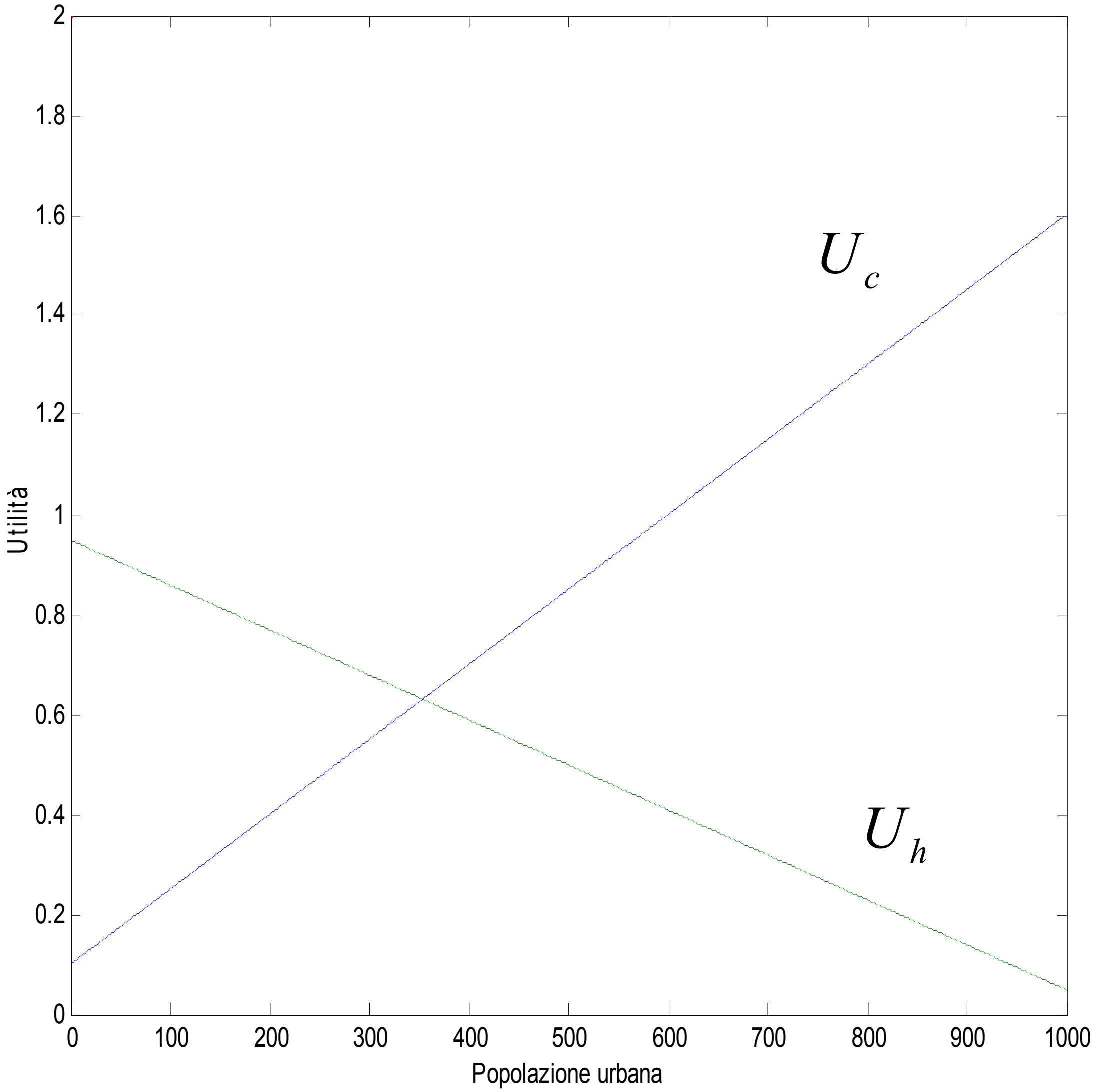
Utilità intrinseca associata ad un'area:

i) Infrastrutture e servizi

ii) qualità di vita

$$\beta_c, \beta_h \geq 0$$

Termini di aggregazione legati alla popolazione. Un segno negativo di questi parametri equivarrebbe ad una tendenza del sistema alla dispersione.



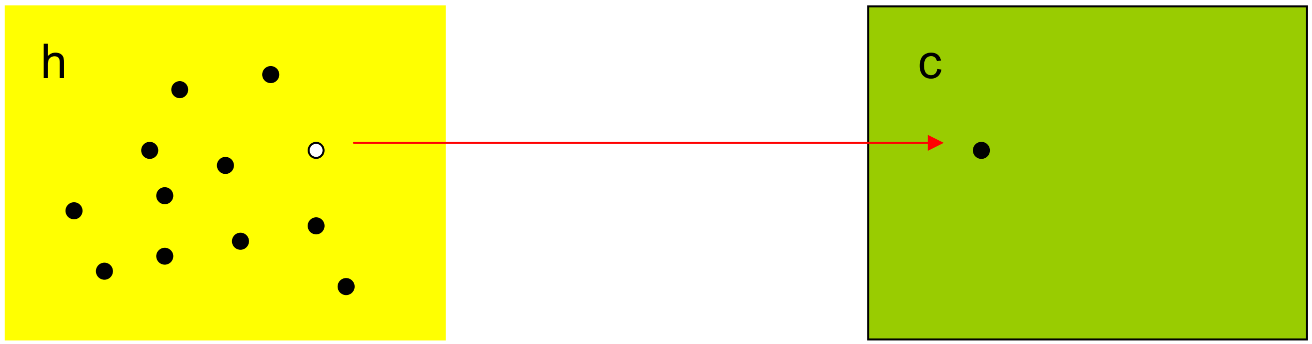
$$\alpha_c = 0.1$$

$$\alpha_h = 0.05$$

$$\beta_c = 1.5$$

$$\beta_h = 0.9$$

Teoria dinamica della decisione



L'intensità di un processo è definita come la probabilità per unità di tempo che il processo abbia luogo:

$$p_{h\to c}(\Delta t) = \frac{\Delta n_{h\to c}}{n_h} \cong \lambda_{h\to c} \cdot \Delta t$$

Questa espressione può essere considerata corretta per tempi molto piccoli

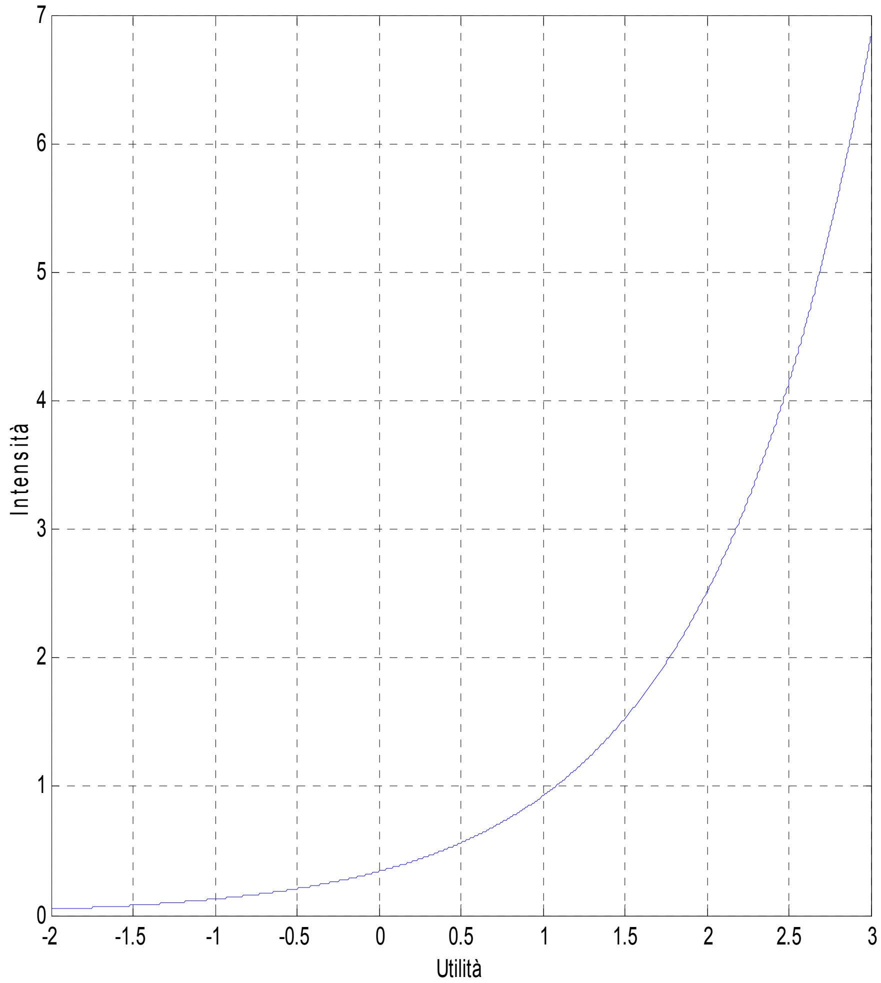
$$\Phi_{h\to c} = \frac{\Delta n_{h\to c}}{\Delta t} = \lambda_{h\to c} \cdot n_h$$

$$\begin{cases} p_{h\to c}(\Delta t) = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot \Delta t \\ p_{c\to h}(\Delta t) = \lambda_{c\to h}(n_h)\cdot \Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{h\to c} = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot n_h = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot (N - n_c) \\ \Phi_{c\to h} = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot n_c \end{cases}$$

Si presenta ora il problema di connettere l'intensità dei processi e dei flussi migratori alle funzione di utilità precedentemente introdotte.

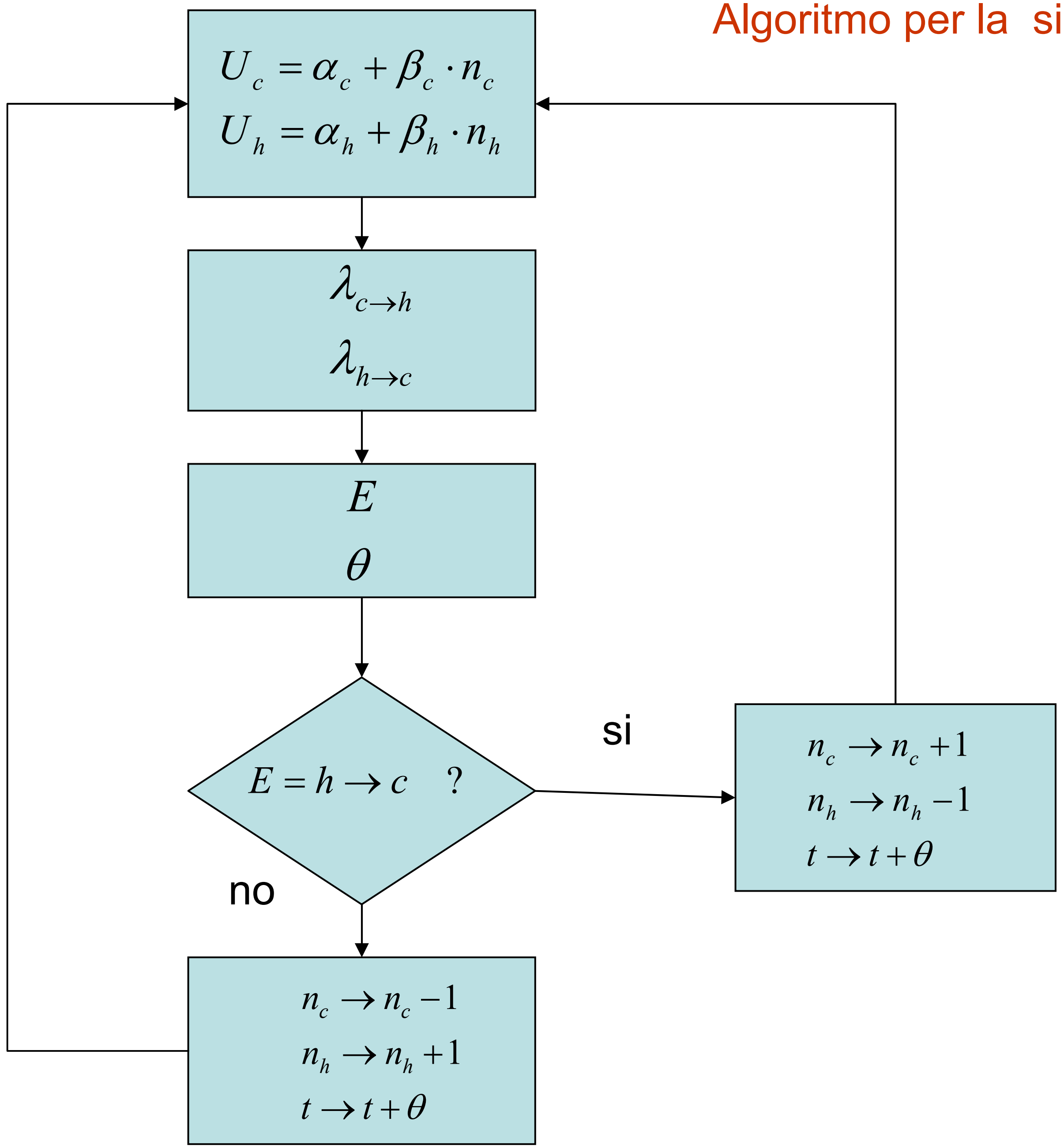
Intensità dei processi decisionali



L'intensità di un processo
cresce rapidamente con il guadagno
Di utilità che esso comporta
e si spegne velocemente quando
Il guadagno di l'utilità diventa
negativo

$$\lambda_{h\to c} = \nu_{h\to c} \cdot \exp(U_c - U_h)$$
$$\lambda_{c\to h} = \nu_{c\to h} \cdot \exp(U_h - U_c)$$

Algoritmo per la simulazione del processo



Alcune semplificazioni del modello

$$\alpha = \alpha_c - \alpha_h$$

$$\beta_c = \beta_h = \beta$$

$$\nu_{c \to h} = \nu_{h \to c}$$

Il parametro di attrattiva α rappresenta la differenza di attrattiva intrinseca fra area urbana e Hinterland. E' positivo quando l'area urbana è più attrattiva dell'Hinterland ed è negativo nella situazione opposta.

Assumiamo che il termine di aggregazione sia lo stesso per l'area urbana e per l'hinterland.

Assumiamo lo stesso fattore d mobilità per l'area urbana e l'Hinterland.

Idealizzazione matematica del sistema urbano

Il sistema urbano è descritto attraverso due soli parametri: la popolazione totale e la popolazione urbana.

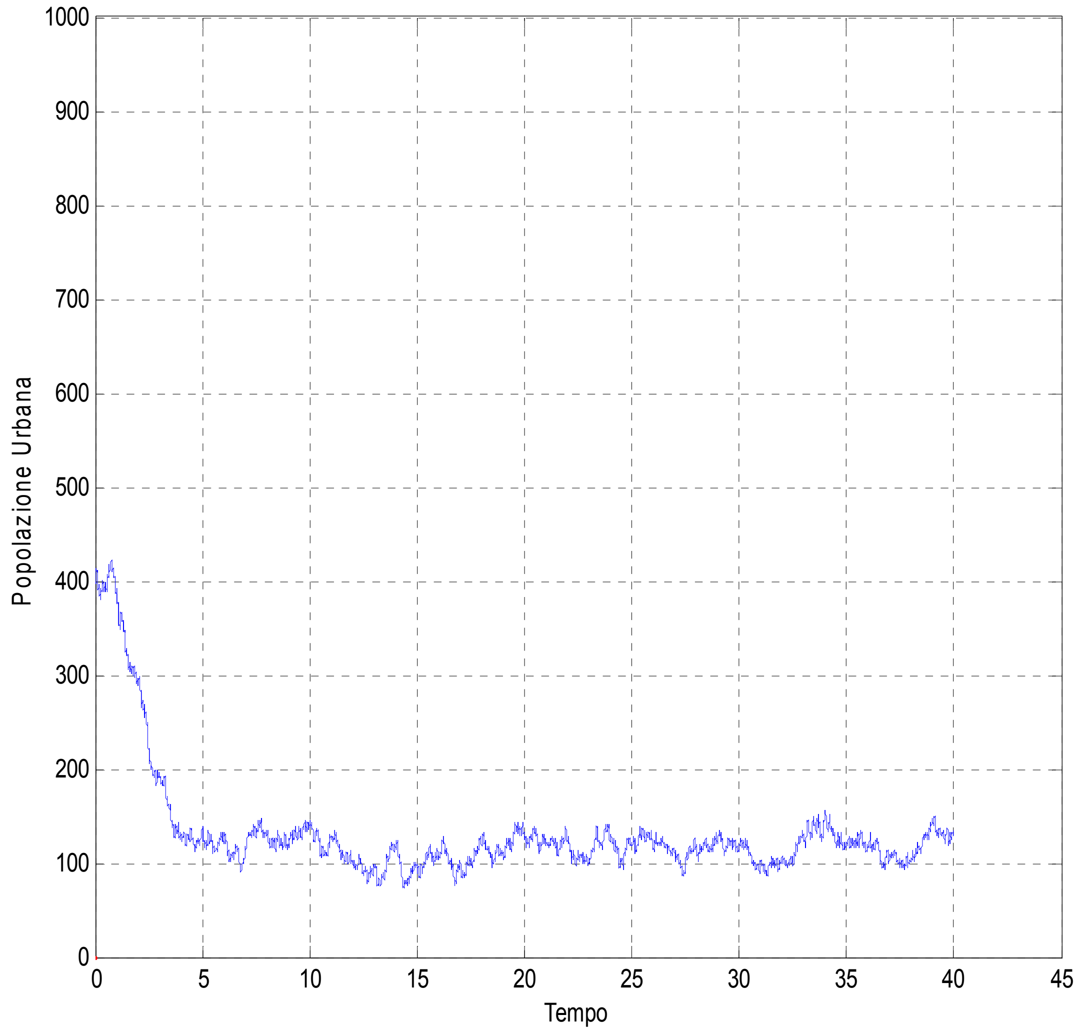
La descrizione della struttura spaziale del sistema è stata ridotta alla sola distinzione tra area urbanizzata e hinterland. In particolare non sono presenti informazioni sull'organizzazione spaziale degli utilizzi del territorio.

Manca una esplicita considerazione del settore economico. Gli individui sono trattati come tutti identici l'uno all'altro e le scelte da essi operate rispondono unicamente ai criteri elementari descritti dalle funzioni di utilità.

Il sistema urbano è stato descritto come isolato dal resto del mondo.

Sono stati trascurati tutti i processi di crescita della popolazione legati alla nascita e alla morte degli individui.

2 – Esempi di evoluzione stocastica

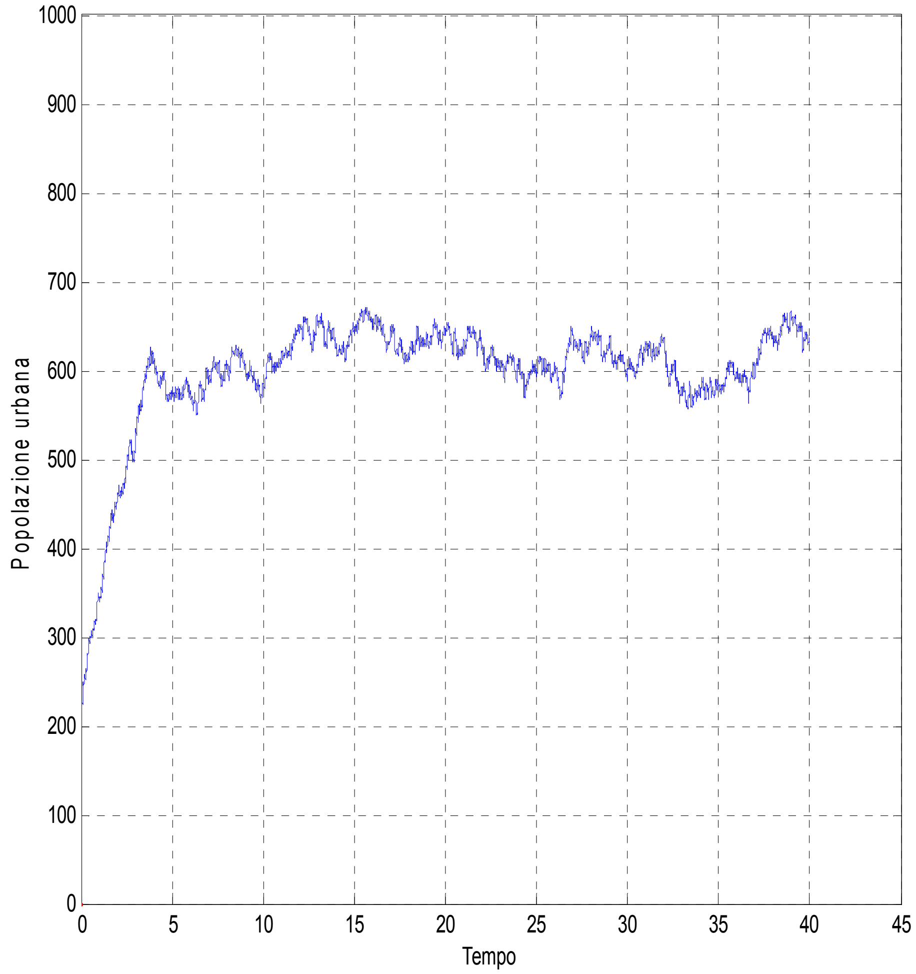


$$\alpha = 0.06$$

$$\beta = 1.4$$

Il sistema si porta col tempo verso una configurazione di equilibrio nella quale la popolazione rurale è prevalente.

Questo accade nonostante sia maggiore l'attrattiva dell'area urbana. Il fattore di aggregazione riesce quindi a prevalere sul termine di attrattiva



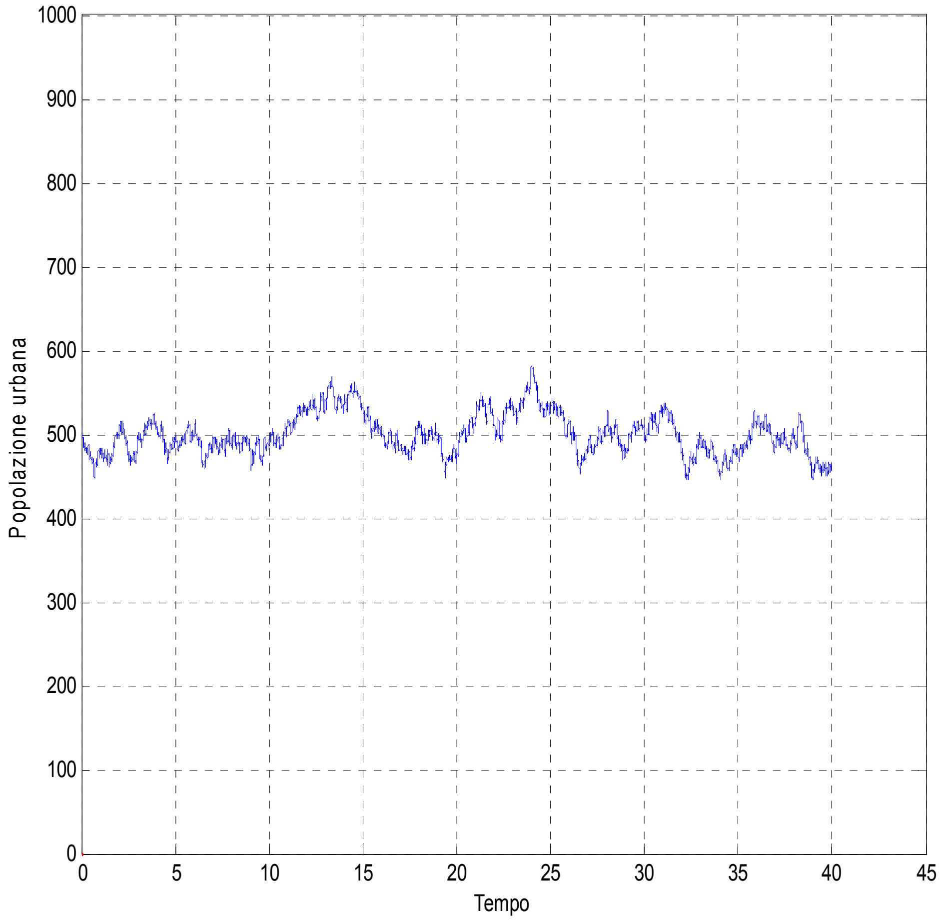
$$\alpha = 0.06$$

$$\beta = 0.8$$

Questa volta il termine di aggregazione ha un valore inferiore.

La minore importanza del termine di aggregazione fa si che il termine di attrattiva abbia il sopravvento e che il sistema raggiunga uno stato di equilibrio caratterizzato da una popolazione prevalentemente urbana

3 - Sistemi simmetrici e rottura di simmetria



$$\alpha = 0$$

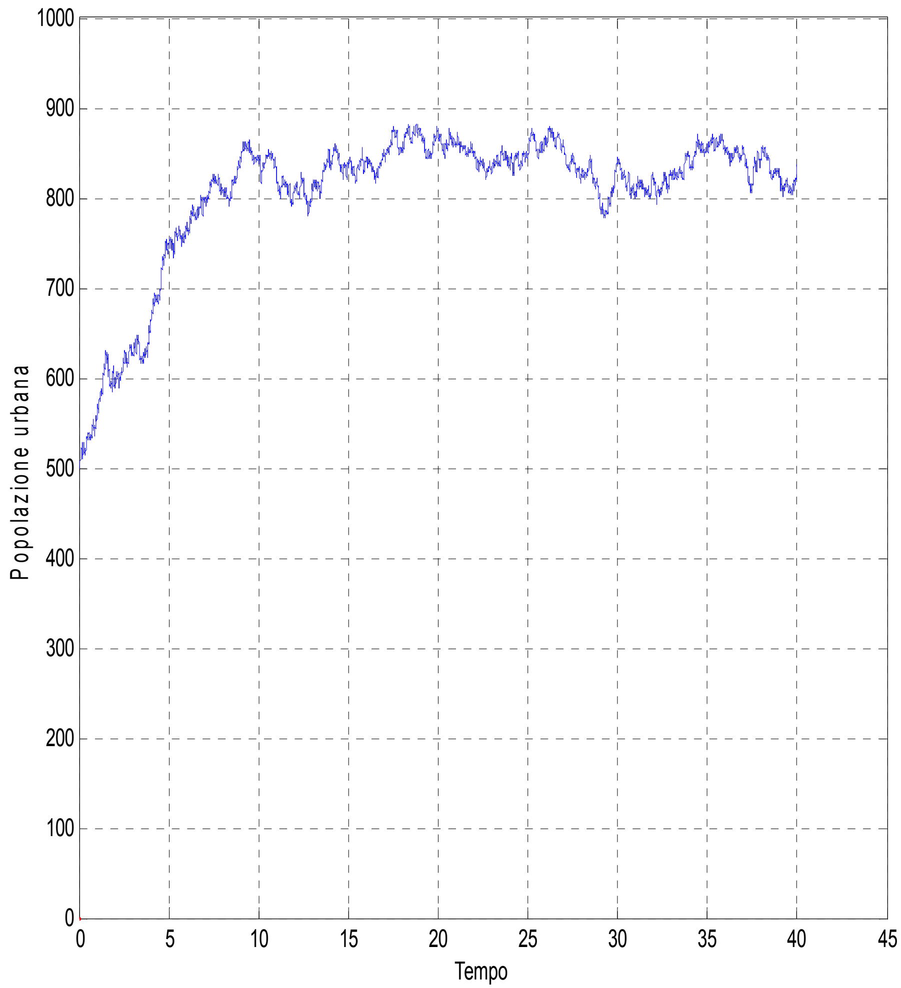
$$\beta = 0.8$$

$$n_c = 500$$

In condizioni di completa simmetria il sistema oscilla attorno ad uno stato di equilibrio caratterizzato da una distribuzione uguale della popolazione tra l'area rurale e l'area urbana

Si noti il basso valore del termine di aggregazione

Rottura di simmetria



$$\alpha = 0$$

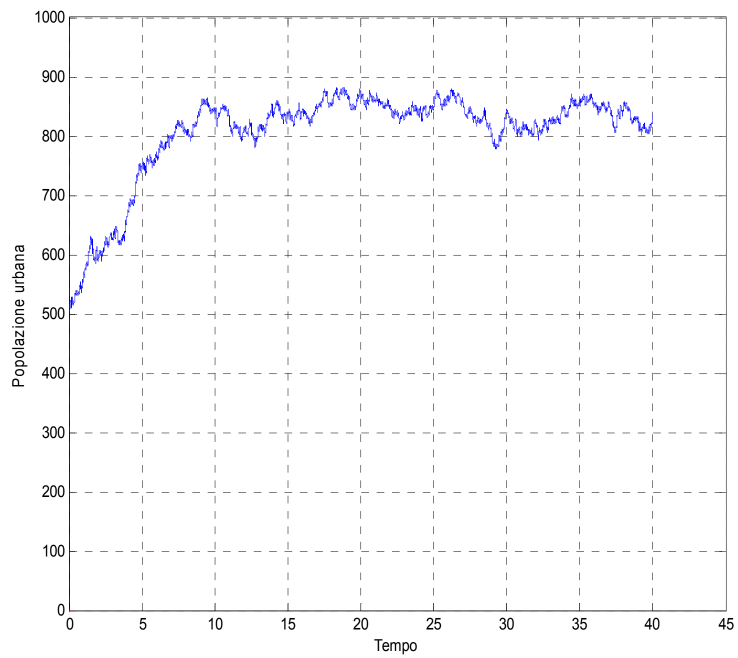
$$\beta = 1.2$$

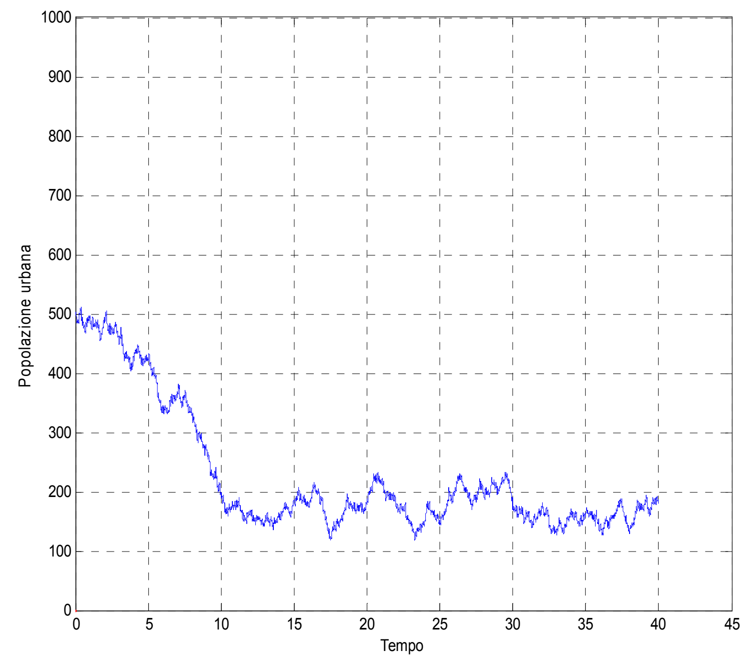
$$n_c = 500$$

Se il termine di aggregazione cresce il sistema si porta verso uno stato di equilibrio che non rispetta più la simmetria del del sistema.

Si è verificata una transizione di fase di seconda specie, con rottura spontanea di simmetria

Fluttuazioni stocastiche

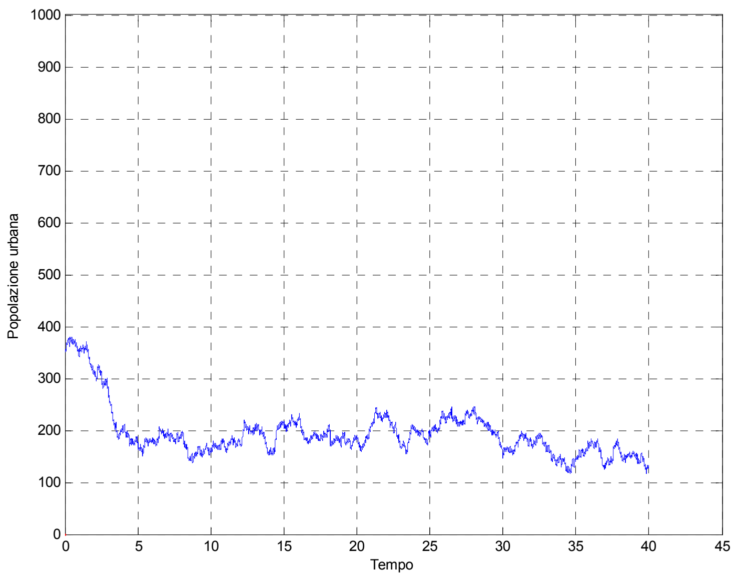


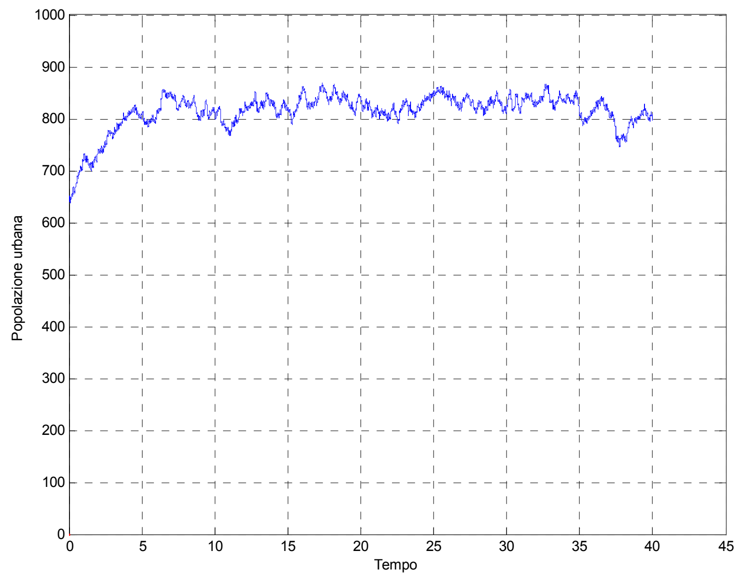


Nelle condizioni precedenti il sistema si porterà a volte verso una configurazione a prevalente popolazione rurale e a volte verso una configurazione di equilibrio a prevalente popolazione urbana. I due stati sono simmetrici rispetto alla configurazione con popolazioni equamente distribuite.

<u>Il destino del sistema è deciso dalle fluttuazioni casuali.</u>

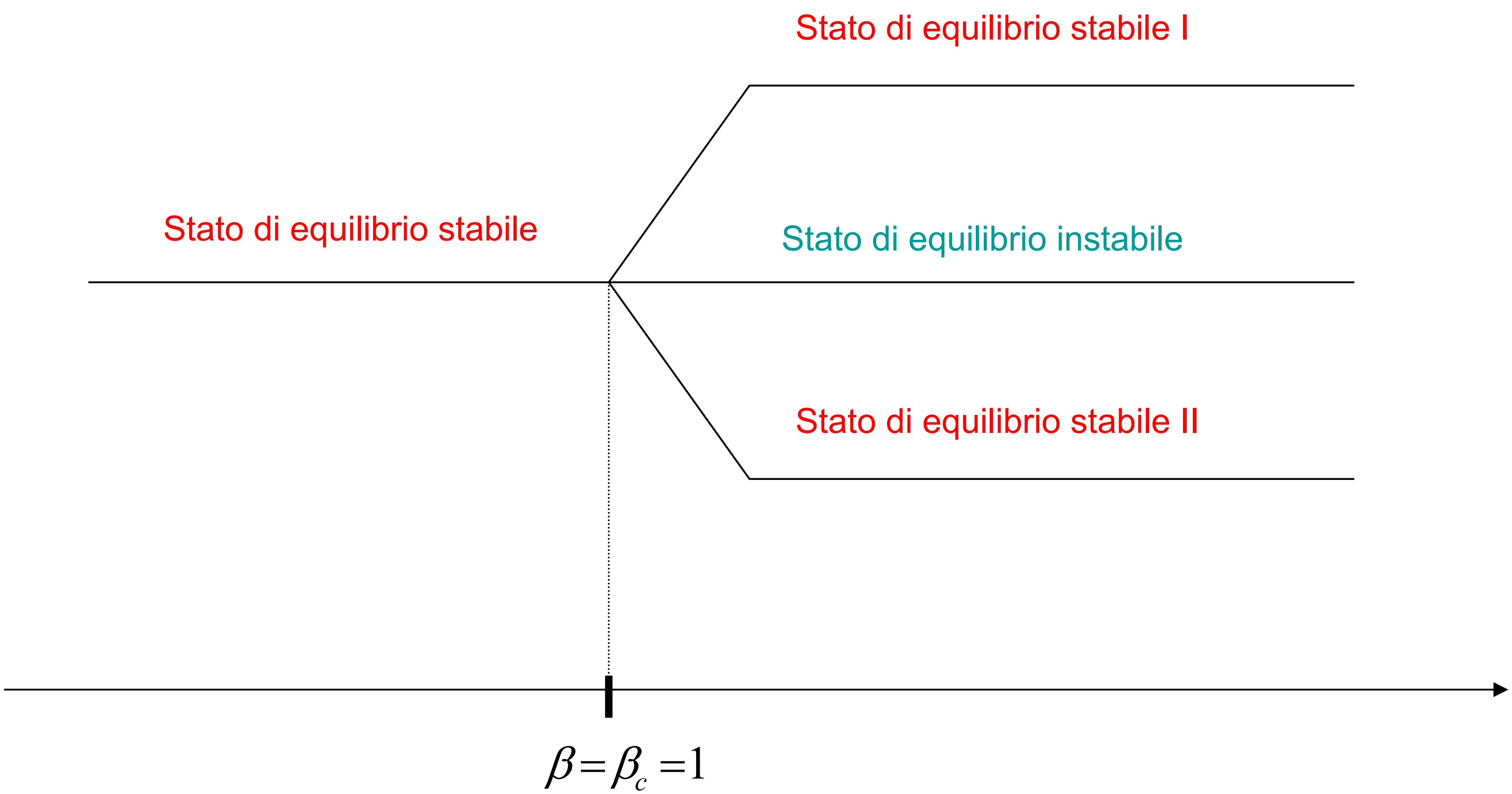
Bacini di attrazione della dinamica



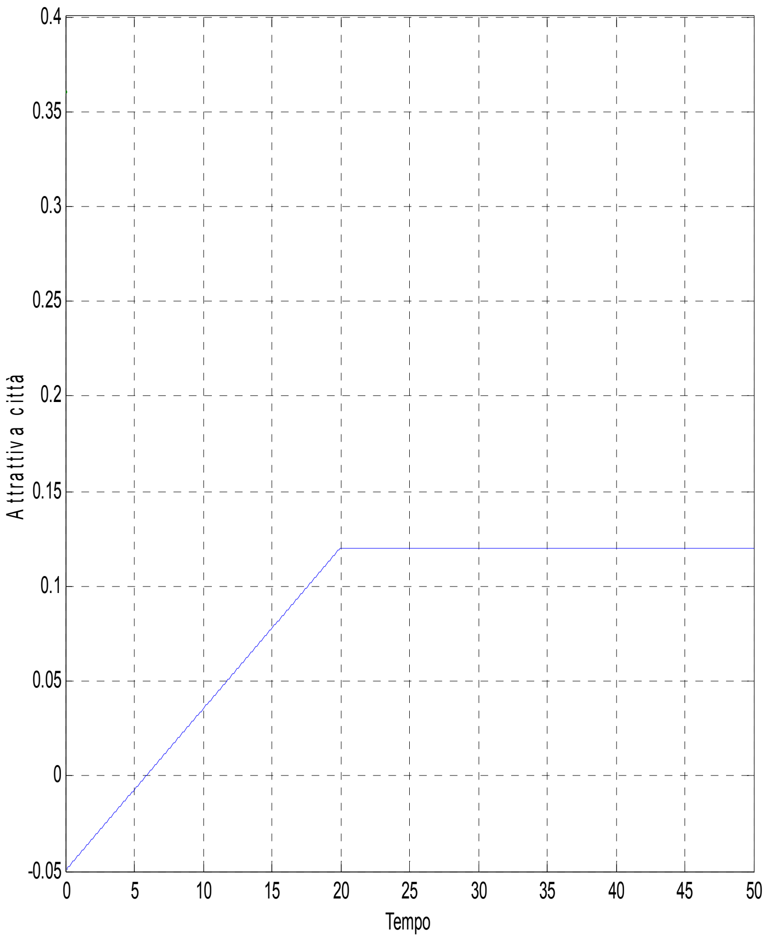


I due stati di equilibrio che il sistema può raggiungere sono stabili nel senso che, partendo da configurazioni vicine a quelle di equilibrio, si finisce sistematicamente sullo stato di equilibrio.

Biforcazioni di seconda specie



4 - Processi di urbanizzazione

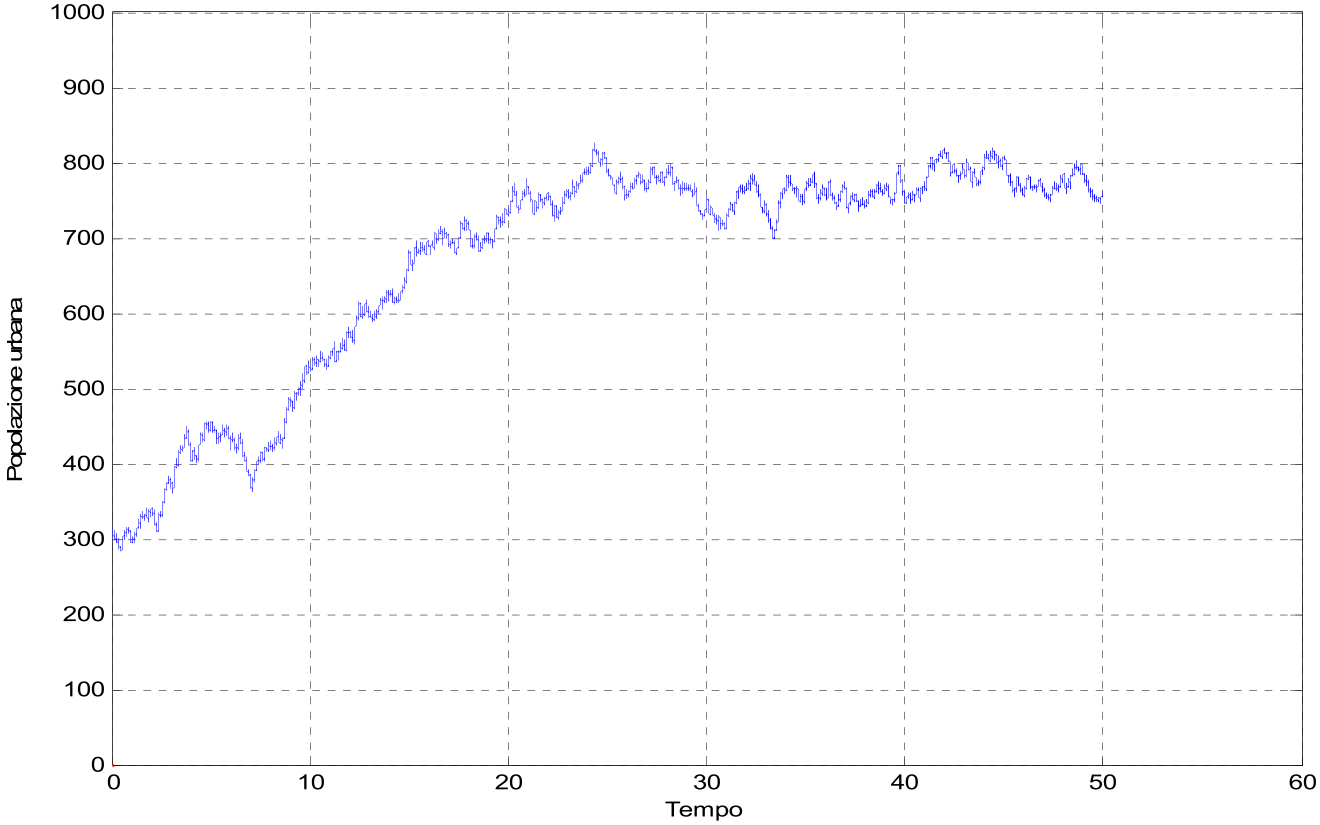


$$\alpha: \quad -0.05 \rightarrow 0.12$$

L'attrattiva della città rispetto all'area rurale cresce di solito col passare del tempo a causa del miglioramento della rete delle infrastrutture e a causa del progresso economico e tecnologico.

Il sistema demografico risponde a queste trasformazioni attraverso il processo di urbanizzazione che consiste nello spostamento sempre più ampio della popolazione dalle aree rurali a quelle urbane.

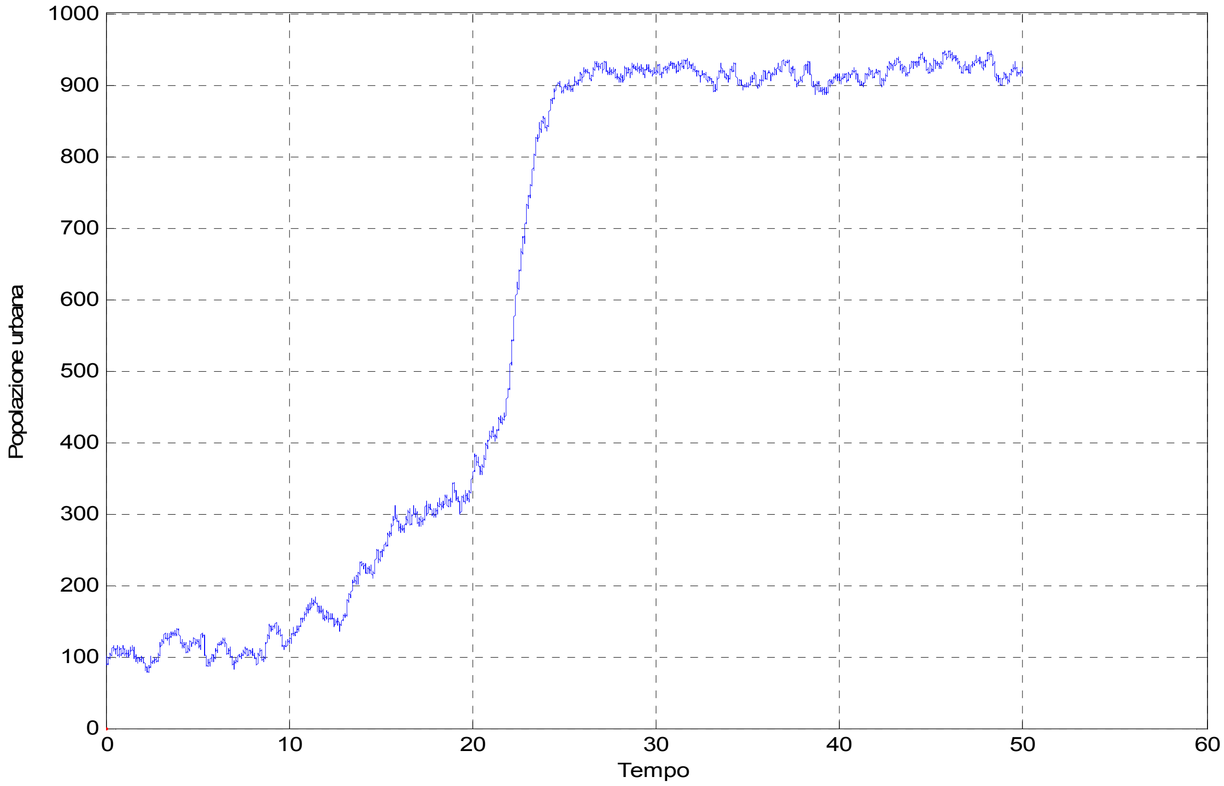
Piccolo parametro di aggregazione



$$\beta = 0.9$$

La percentuale di popolazione urbana cresce progressivamente nel tempo, adeguandosi al graduale aumento dell'attrattiva della area urbana rispetto a quella rurale

Grande parametro di aggregazione



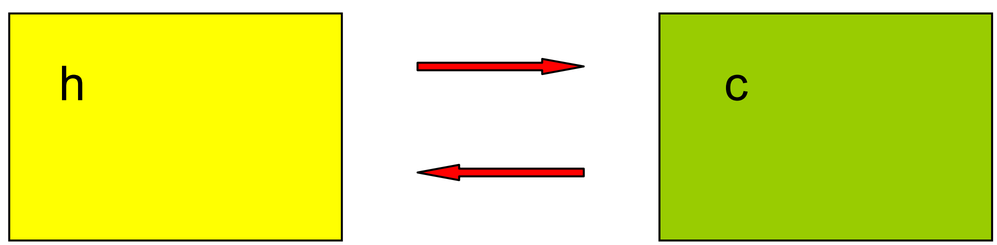
$$\beta = 1.3$$

La percentuale di popolazione urbana subisce un aumento brusco in un intervallo di tempo breve. Il processo di urbanizzazione sembra passare attraverso una fase di instabilità strutturale.

5 - Stati di equilibrio del sistema

Il sistema è in equilibrio quando l'intensità del flusso migratorio dall'hinterland alla città è uguale a all'intensità del flusso nella direzione opposta:

$$\boxed{\Phi_{h \to c} = \Phi_{c \to h}}$$



Intensità dei flussi migratori

$$\Phi_{h\to c} = n_h \cdot \nu \cdot \exp\left(\alpha_c + \beta_c n_c - (\alpha_h + \beta_h n_h)\right)$$

$$\Phi_{c\to h} = n_c \cdot \nu \cdot \exp\left(\alpha_h + \beta_h n_h - (\alpha_c + \beta_c n_c)\right)$$

$$\alpha = \alpha_c - \alpha_h$$

$$\beta = \beta_c = \beta_h$$

$$n = n_c - n_h$$

Assumiamo che il termine aggregazione sia uguale per l'hinterland e per l'area urbana

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{c\to h} &= \nu \cdot (N - n) \cdot \exp\left(\alpha + \beta \cdot n\right) \\ \Phi_{h\to c} &= \nu \cdot (N + n) \cdot \exp\left(-\alpha - \beta \cdot n\right) \end{aligned}}$$

Equazione per la configurazioni di equilibrio

$$\Phi_{h \to c} = \Phi_{c \to h}$$

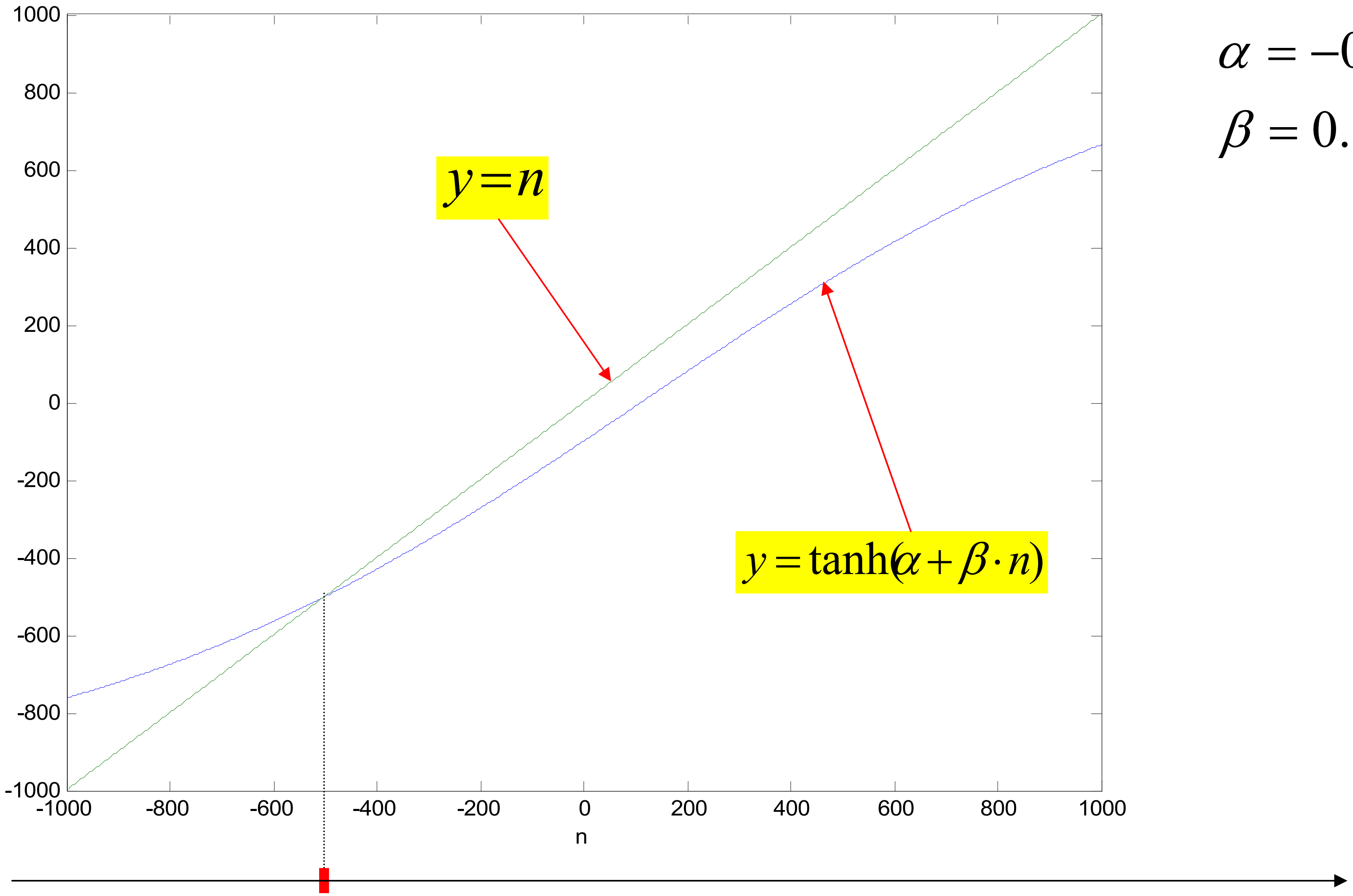
Condizione di uguaglianza dei flussi

$$(N - n) \cdot \nu \cdot \exp(\alpha + \beta \cdot n) = (N + n) \cdot \nu \cdot \exp(-\alpha - \beta \cdot n)$$

$$\boxed{n = N \frac{\exp(\alpha + \beta \cdot n) - \exp(-\alpha - \beta \cdot n)}{\exp(\alpha + \beta \cdot n) + \exp(-\alpha - \beta \cdot n)} = N \cdot \tanh(\alpha + \beta \cdot n)}$$

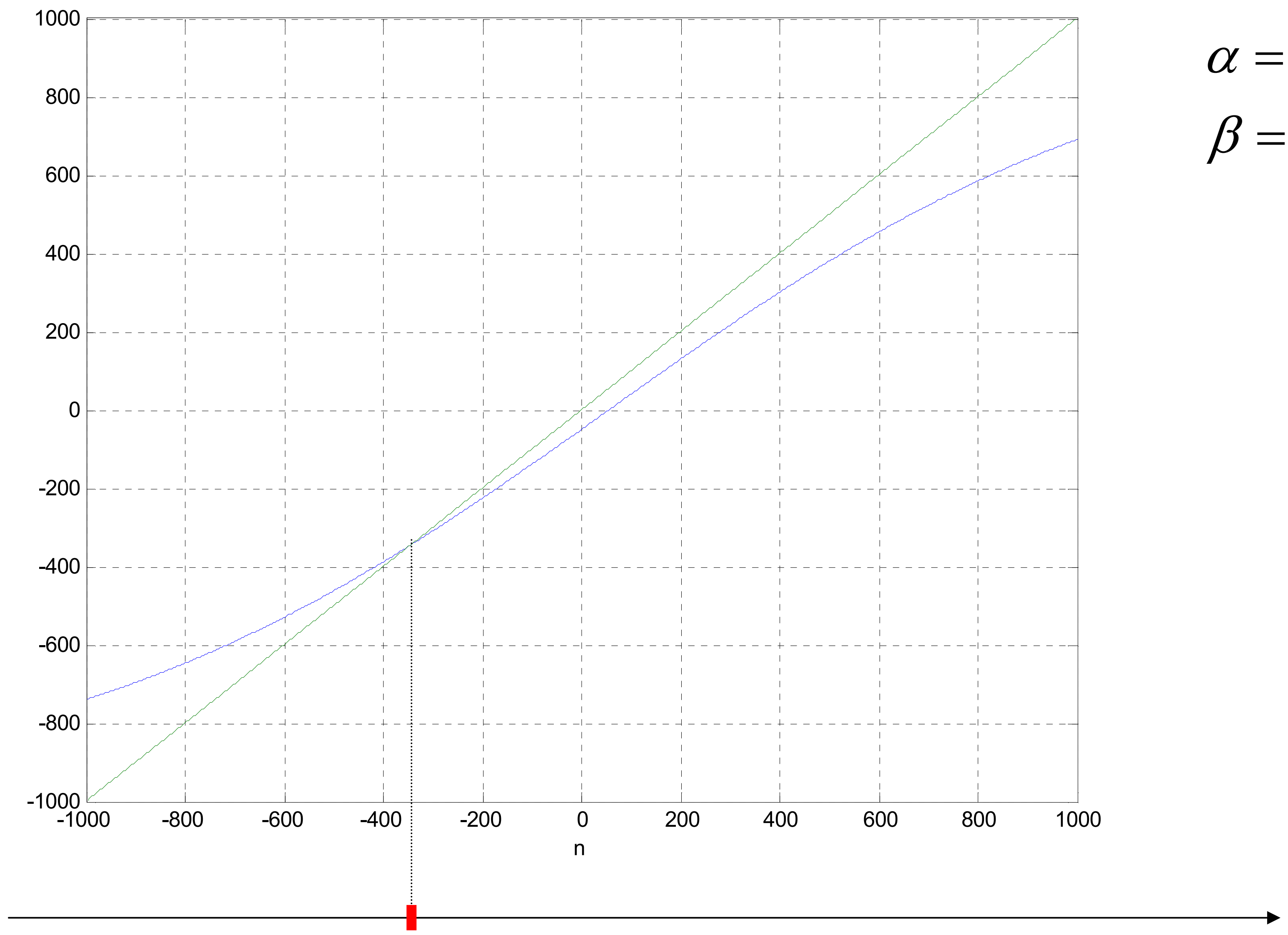
Le configurazioni di equilibrio del sistema sono date dai valori di n che soddisfano la precedente equazione

Soluzione grafica della equazione di equilibrio



$$\alpha = -0.1$$
$$\beta = 0.9$$

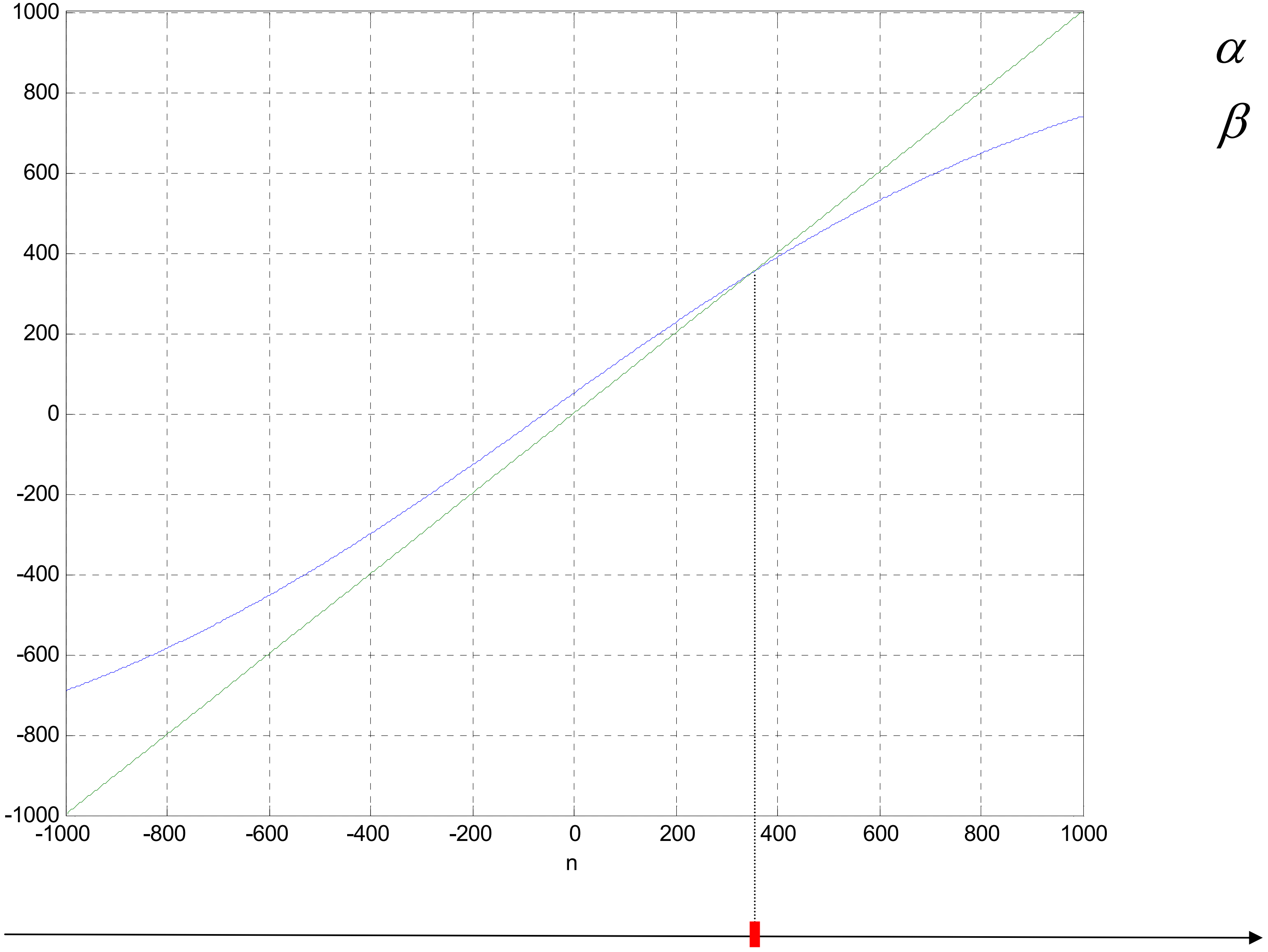
Basso valore del parametro di aggregazione



$$\alpha = -0.05$$

$$\beta = 0.9$$

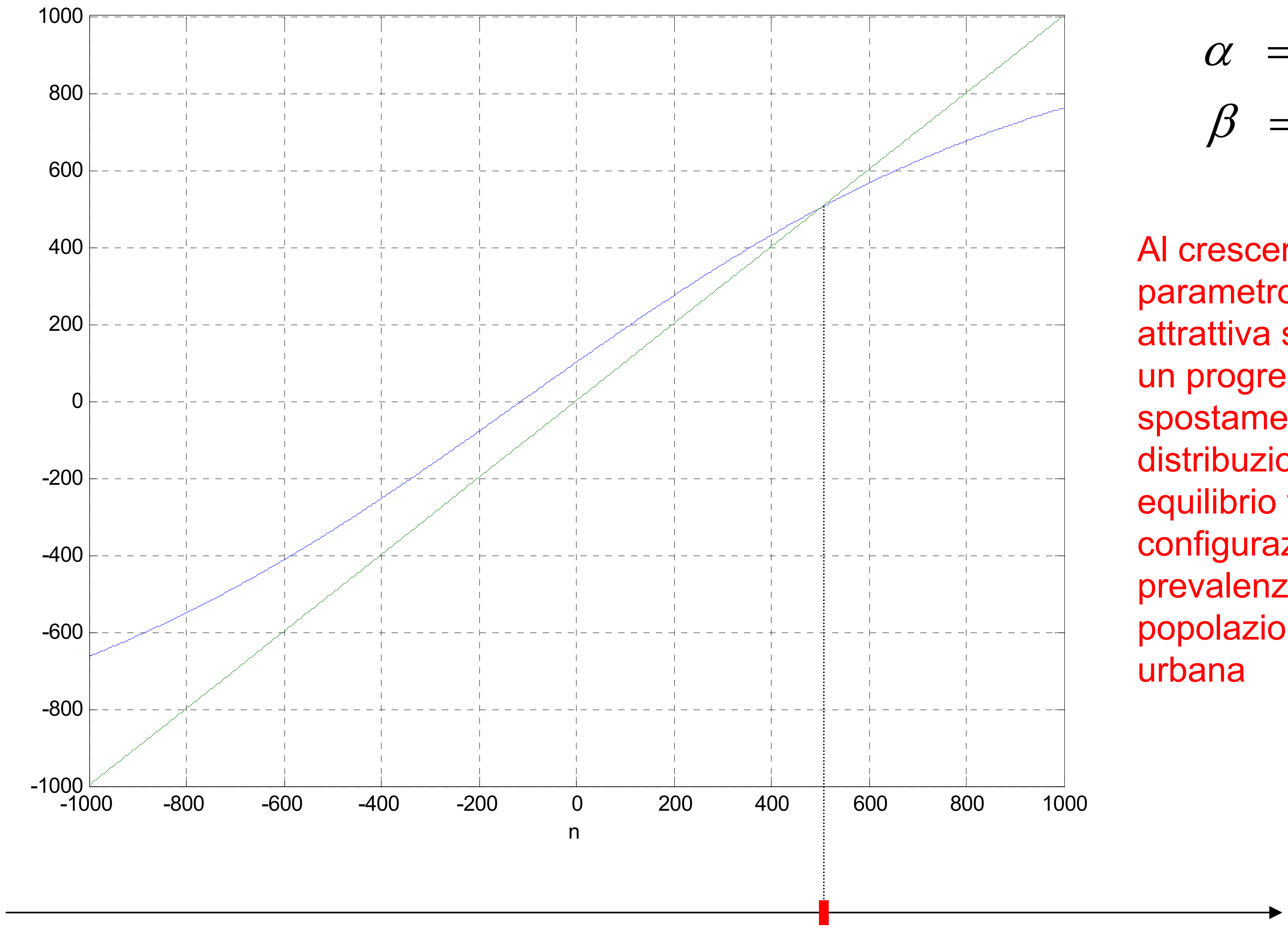
Basso valore del parametro di aggregazione



$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 0.9$$

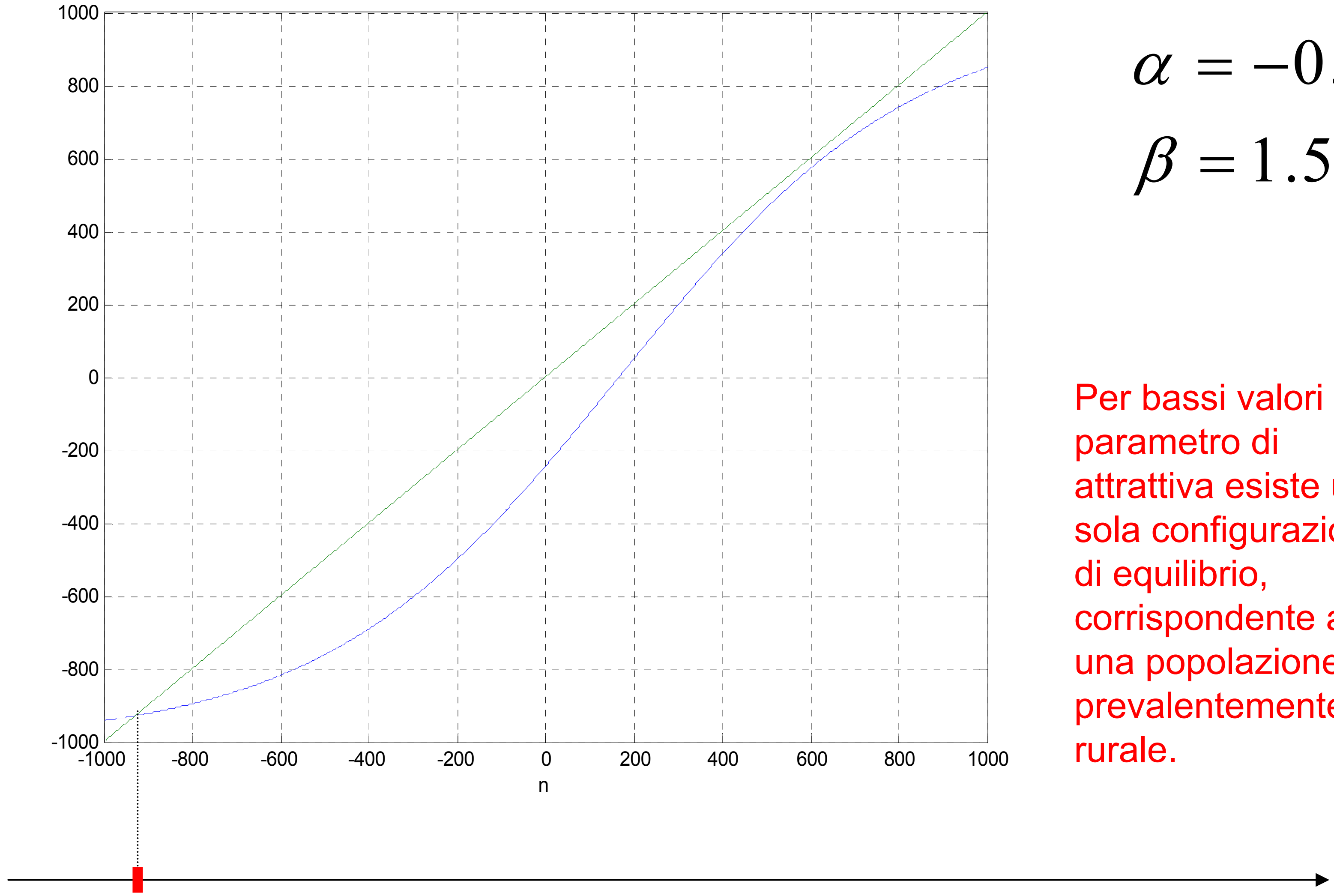
Basso valore del parametro di aggregazione



$$\alpha = 0.1$$
$$\beta = 0.9$$

Al crescere del parametro di attrattiva si osserva un progressivo spostamento della distribuzione di equilibrio verso configurazioni a prevalenza di popolazione urbana

Alto valore del parametro di aggregazione

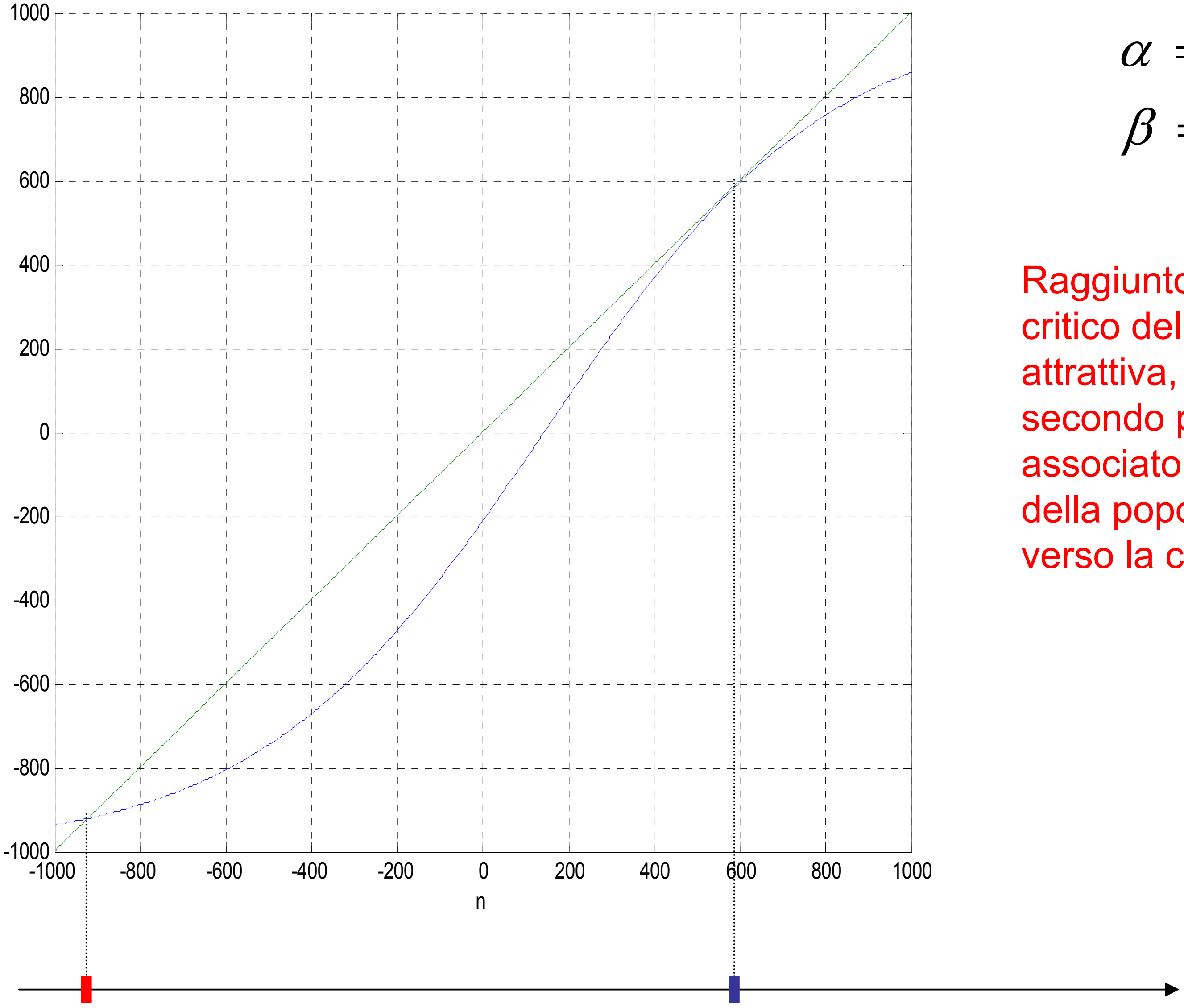


$$\alpha = -0.25$$

$$\beta = 1.5$$

Per bassi valori del parametro di attrattiva esiste una sola configurazione di equilibrio, corrispondente ad una popolazione prevalentemente rurale.

Alto valore del parametro di aggregazione

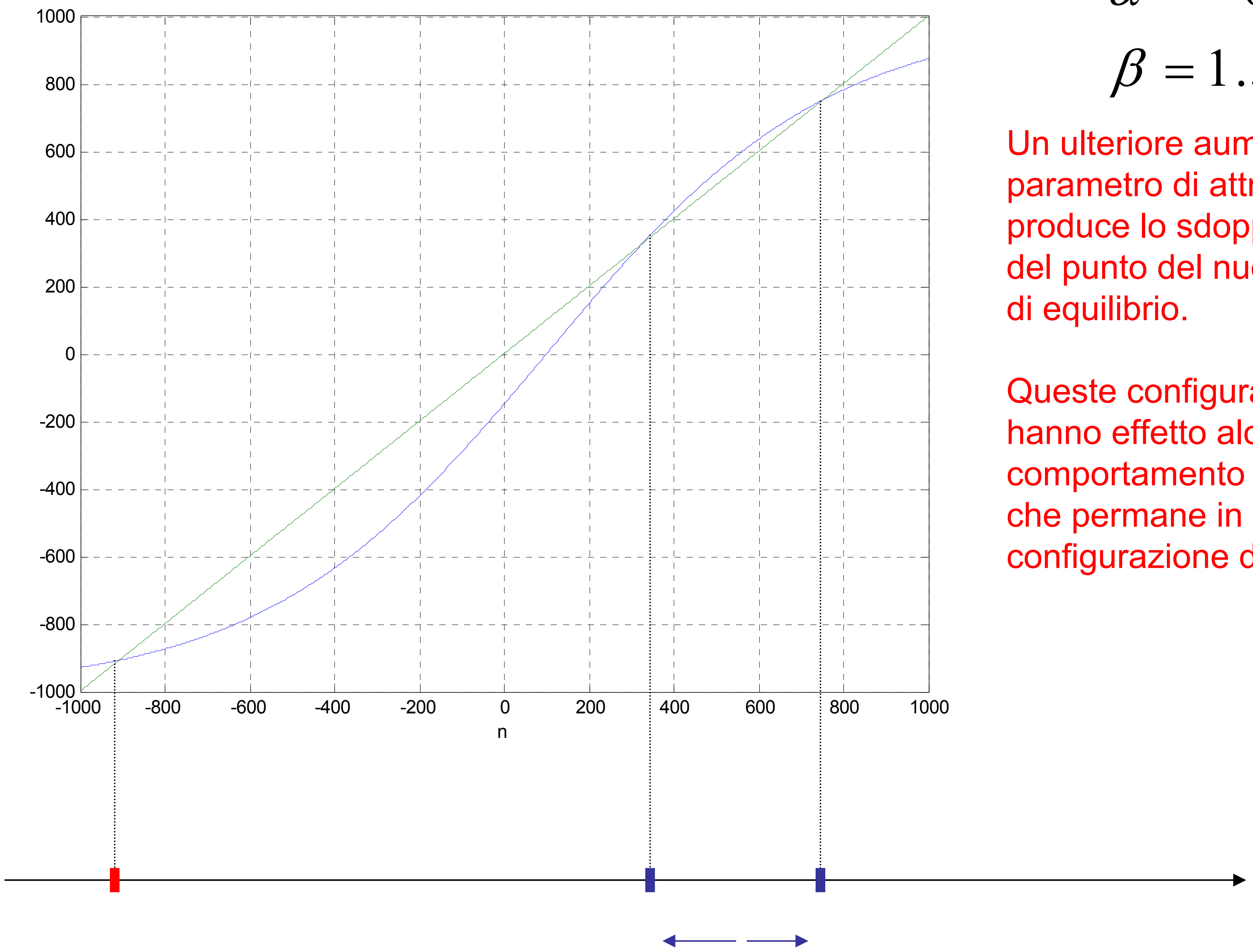


$$\alpha = -0.215$$

$$\beta = 1.5$$

Raggiunto un certo valore critico del parametro di attrattiva, si genera un secondo punto di equilibrio, associato ad una distribuzione della popolazione sbilanciata verso la città.

Alto valore del parametro di aggregazione



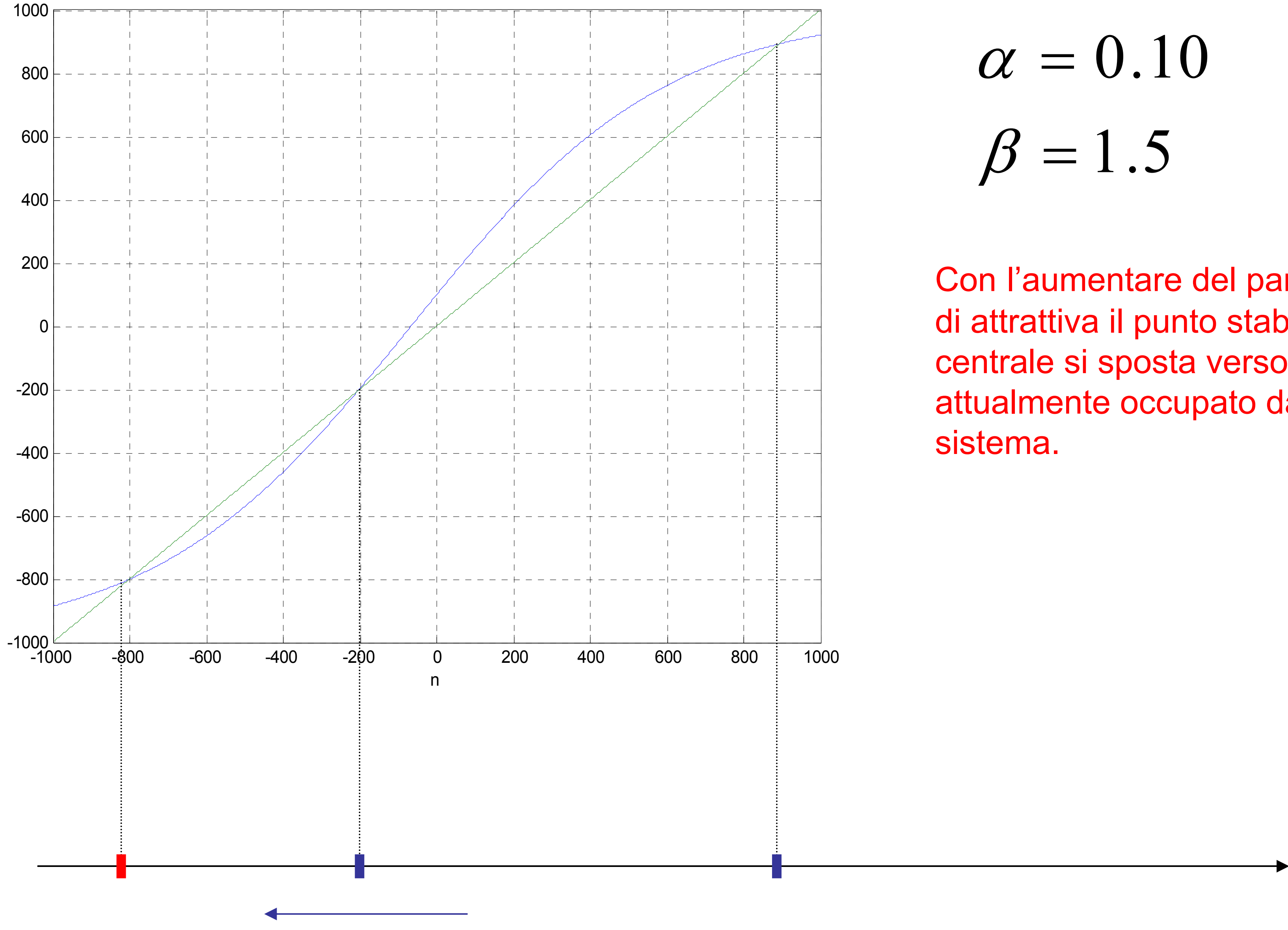
$$\alpha = -0.15$$

$$\beta = 1.5$$

Un ulteriore aumento del parametro di attrattiva produce lo sdoppiamento del punto del nuovo punto di equilibrio.

Queste configurazioni non hanno effetto alcuno sul comportamento del sistema, che permane in una configurazione di tipo rurale.

Alto valore del parametro di aggregazione

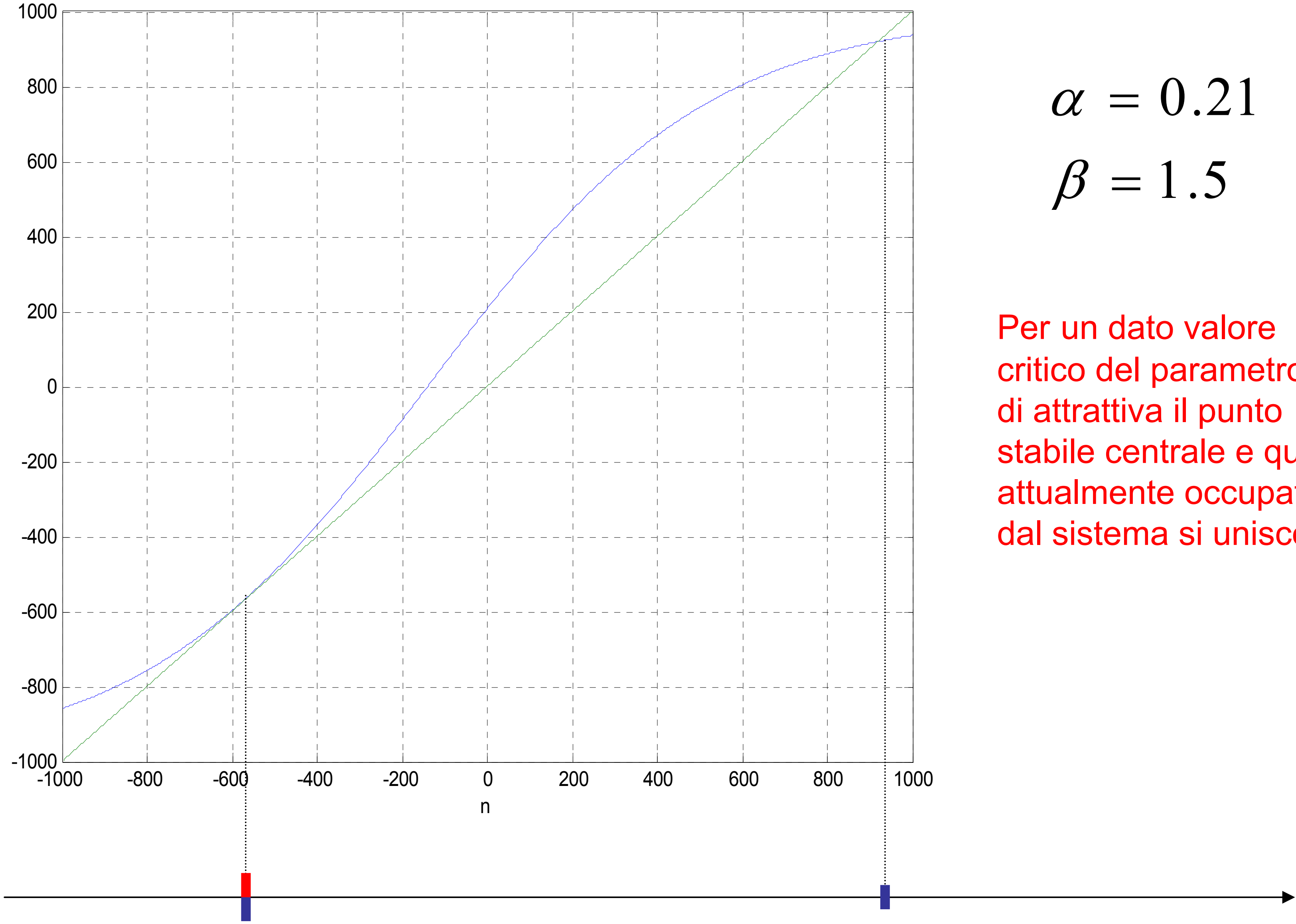


$$\alpha = 0.10$$

$$\beta = 1.5$$

Con l'aumentare del parametro di attrattiva il punto stabile centrale si sposta verso quello attualmente occupato dal sistema.

Alto valore del parametro di aggregazione

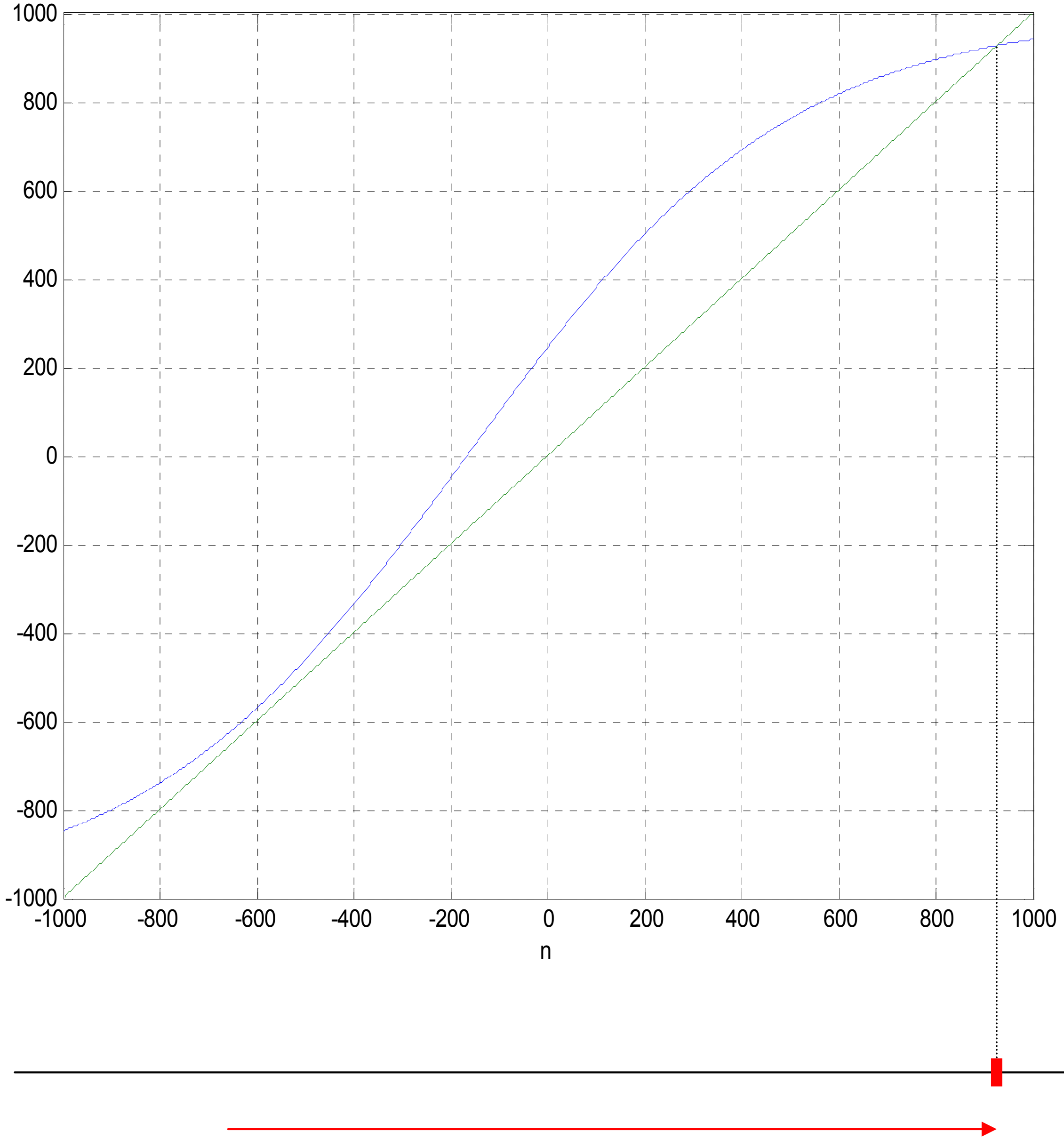


$$\alpha = 0.21$$

$$\beta = 1.5$$

Per un dato valore critico del parametro di attrattiva il punto stabile centrale e quello attualmente occupato dal sistema si uniscono

Alto valore del parametro di aggregazione



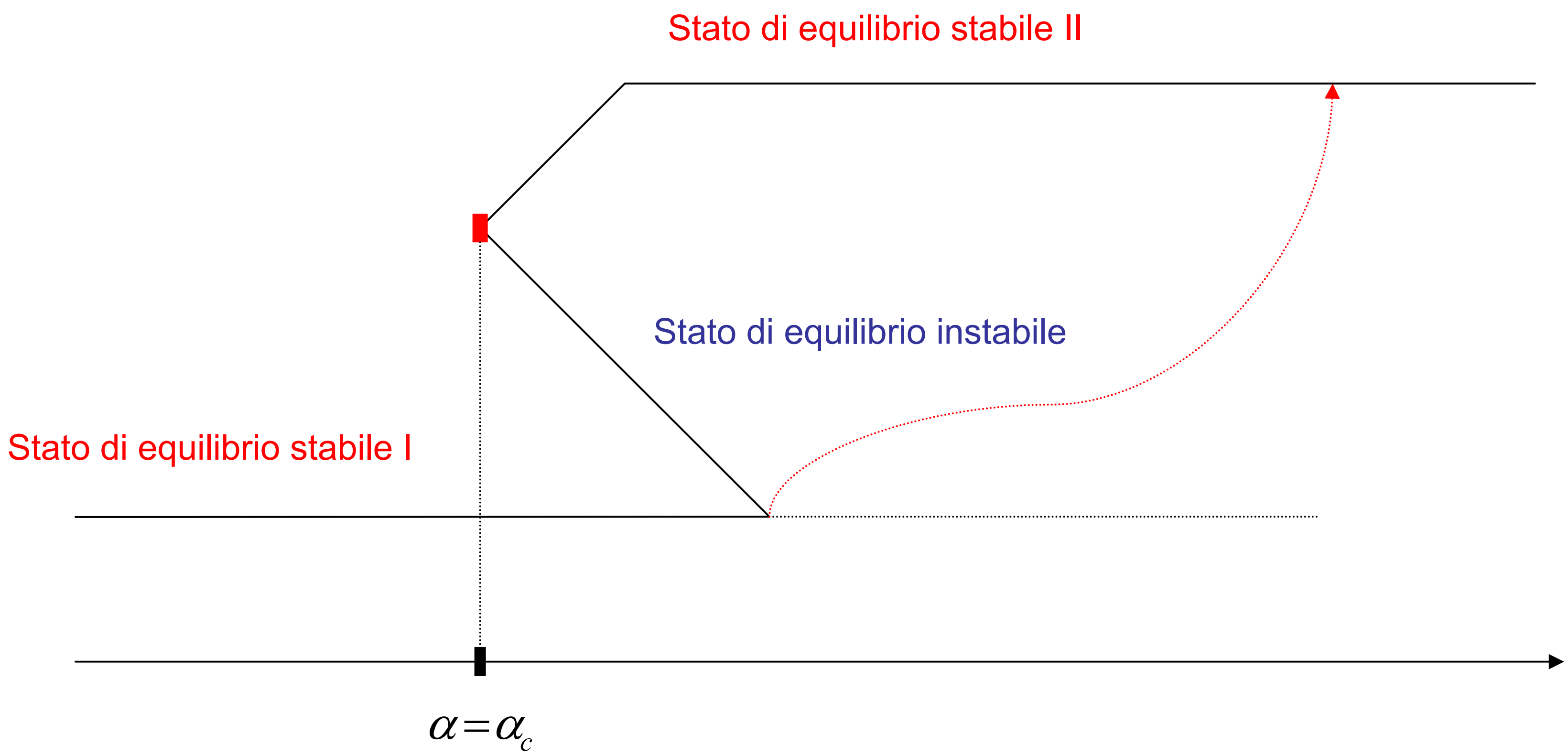
$$\alpha = 0.25$$

$$\beta = 1.5$$

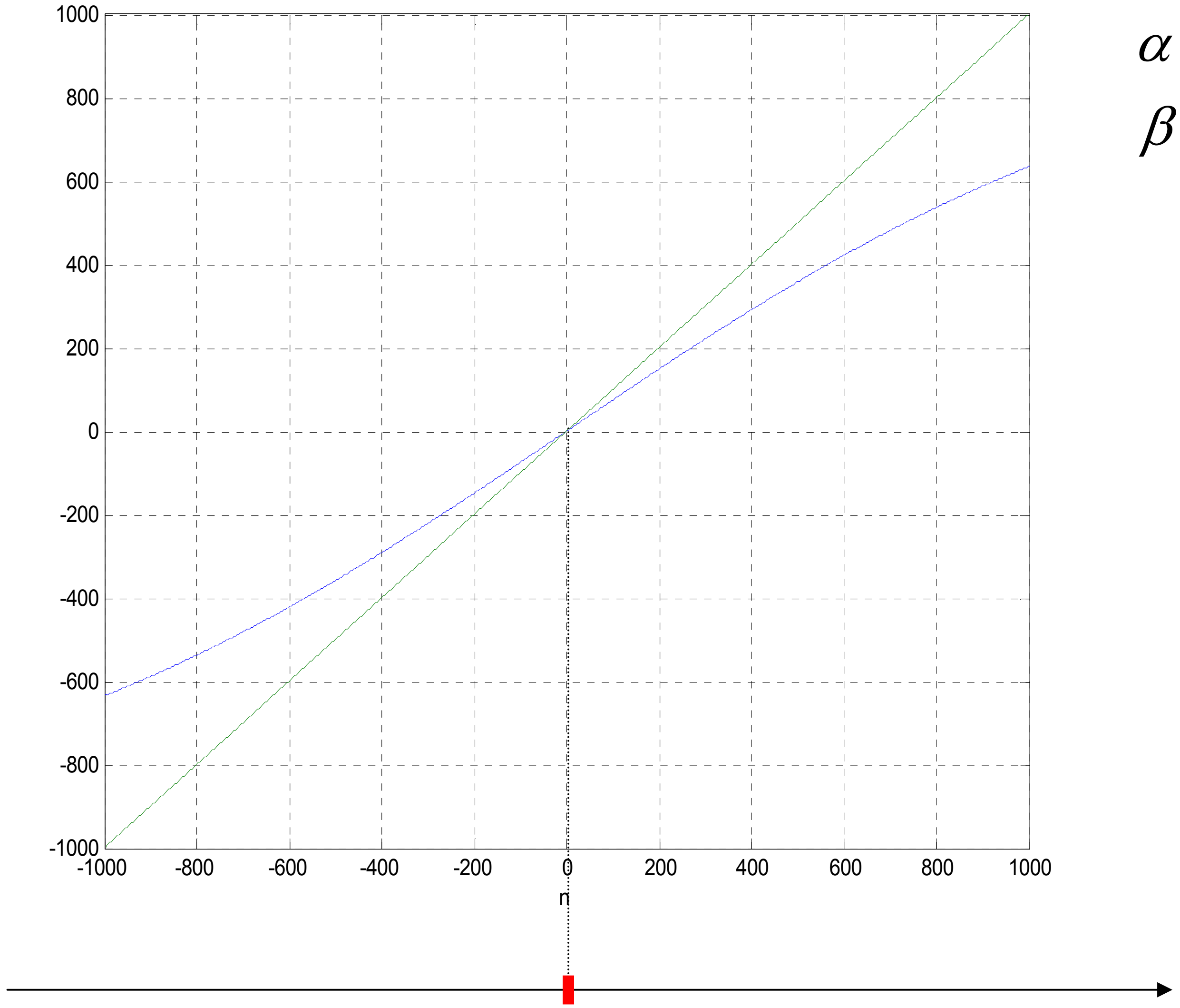
Per valori maggiori di quello critico rimane solo il punto stabile caratterizzato dalla distribuzione di popolazione urbana e il sistema si trova improvvisamente in una configurazione instabile.

Biforcazioni di prima specie

$$\beta > \beta_c = 1$$



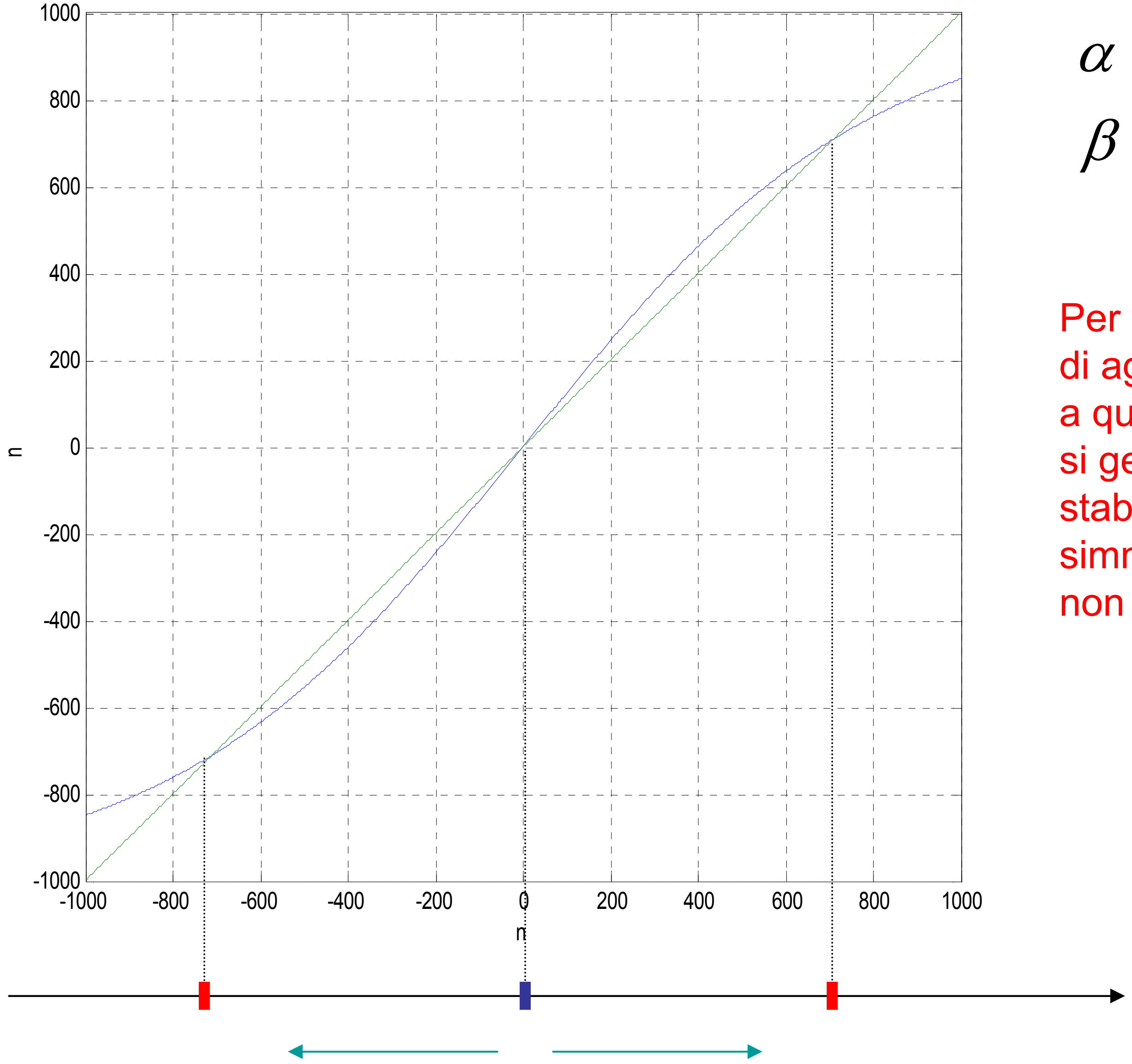
Spiegazione della biforcazione di seconda specie



$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0.75 < \beta_c = 1$$

Per valori del parametro di aggregazione inferiori a quello critico il sistema possiede una sola configurazione di equilibrio nella quale la popolazione è ugualmente distribuita tra città e hinterland



$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1.25 > \beta_c = 1$$

Per valori del parametro
di aggregazione superiori
a quello critico la
si generano due configurazioni
stabili nelle quali la
simmetria naturale del sistema
non è più rispettata.

6 - Equazioni differenziali per i valori medi

L'intensità dei flussi migratori nelle due direzioni è connessa all'intensità dei processi:

$$\Phi_{h\to c} = \frac{\Delta n_{h\to c}}{\Delta t} = \lambda_{h\to c} \cdot n_h \quad \Rightarrow \quad \Delta n_{h\to c} = \lambda_{h\to c}(N - n_c)\,\Delta t$$

$$\Phi_{c\to h} = \frac{\Delta n_{c\to h}}{\Delta t} = \lambda_{c\to h} \cdot n_c \quad \Rightarrow \quad \Delta n_{h\to c} = \lambda_{c\to h} \cdot n_c\,\Delta t$$

La variazione della popolazione urbana può essere ricavata dalle relazioni precedenti:

$$\Delta n_c = \Delta n_{h\to c} + \Delta n_{c\to h} = \left(\lambda_{h\to c} n_c + \lambda_{c\to h}(N - n_c)\right)\Delta t$$

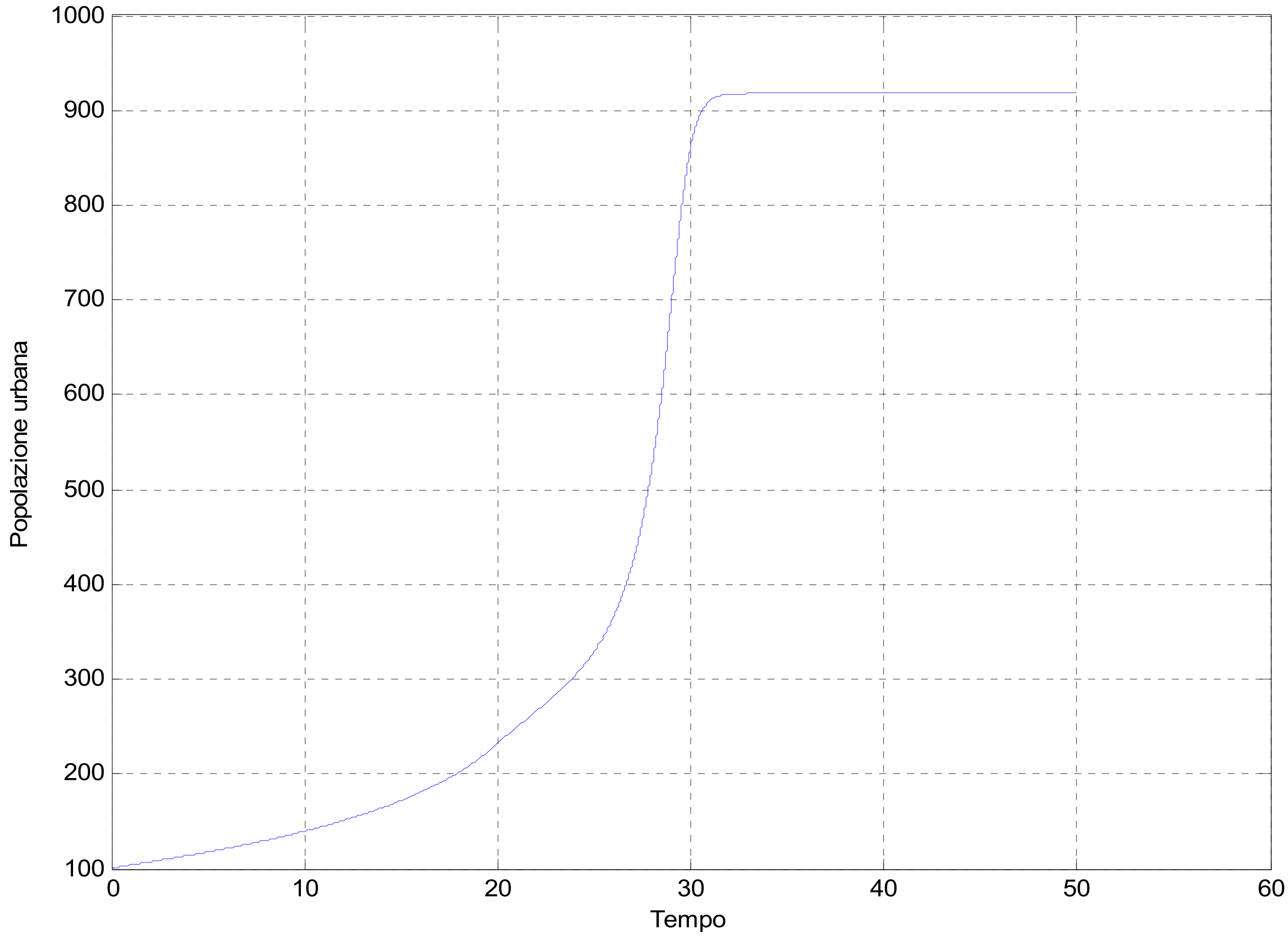
Dalla relazione precedente si ottiene la seguente equazione per l'evoluzione del valore medio:

$$\frac{\Delta n_c}{\Delta t} = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot(N-n_c)+\lambda_{c\to h}(n_c)\cdot n_c$$

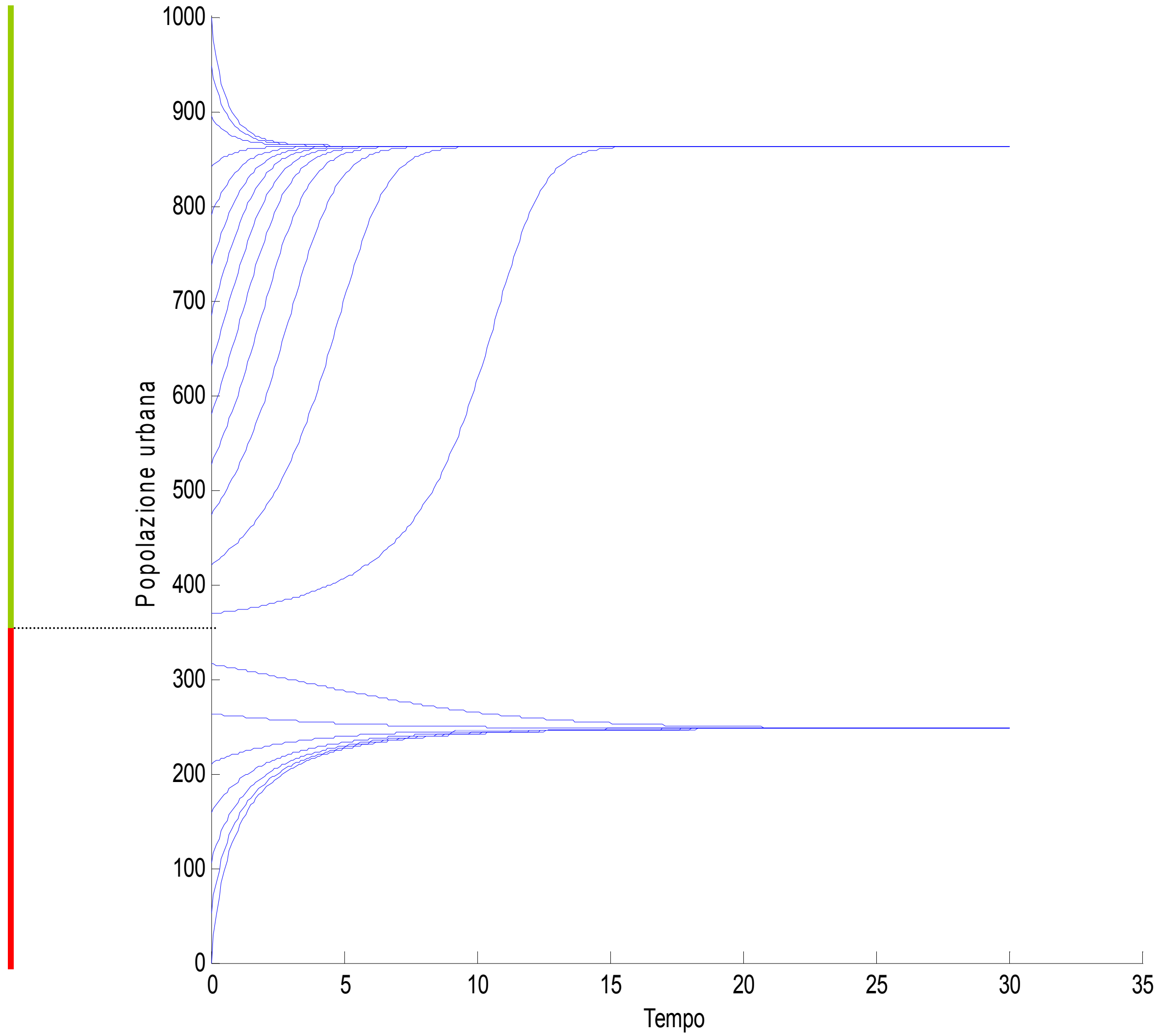
Prendendo il limite per $\Delta t \to 0$ si arriva infine ad una equazione differenziale:

$$\boxed{\frac{d\,n_c}{dt} = \lambda_{h\to c}(n_c)\cdot(N-n_c)+\lambda_{c\to h}(n_c)\cdot n_c}$$

Analisi deterministica della transizione di fase



Bacini di attrazione



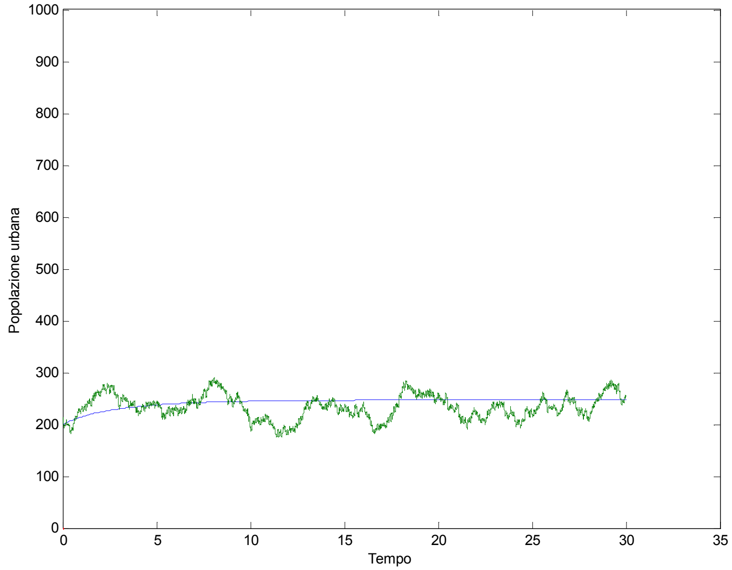
$$\alpha = 0.05$$

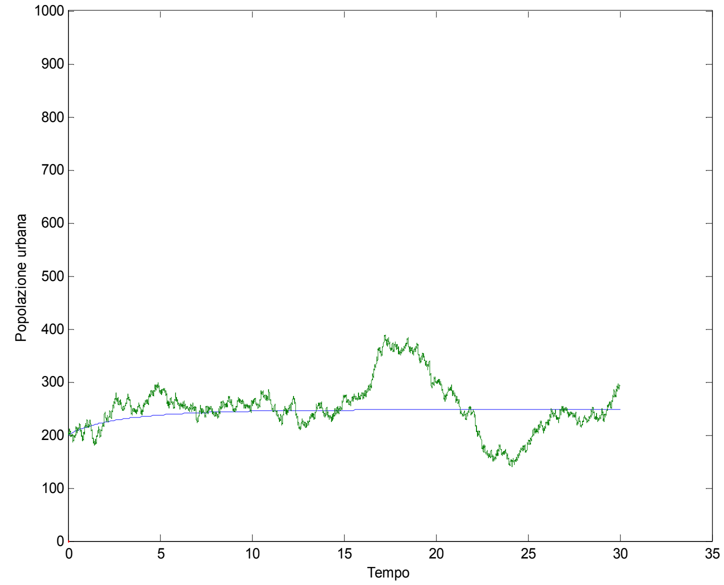
$$\beta = 1.2$$

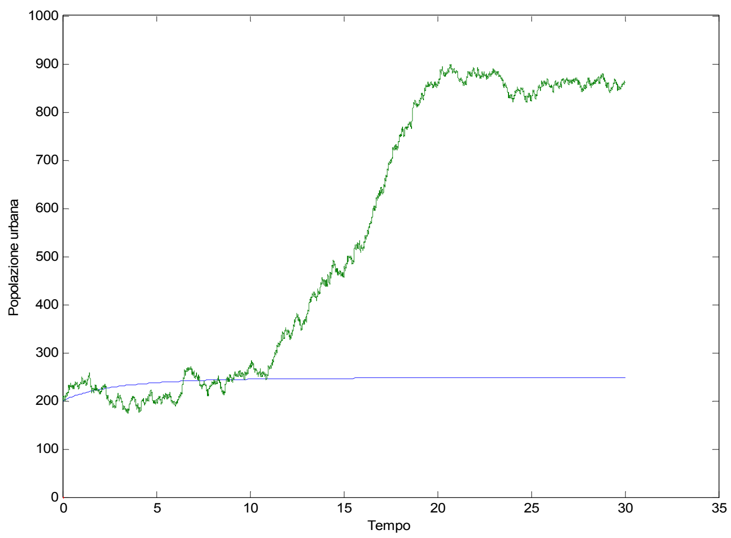
Con questa scelta dei parametri il sistema presenta due punti di attrazione stabili. a seconda della distribuzione iniziale della popolazione, il sistema sistema evolve verso una delle due configurazioni stabili.

In questo modo lo spazio delle configurazioni resta diviso in due regioni distinte, chiamate bacini di attrazione della dinamica. Il punto di separazione tra i due bacini è la configurazione di equilibrio instabile

Transizioni di fase indotte dal rumore







Le fluttuazioni stocastiche attorno alla traiettoria più probabile possono produrre la fuga del sistema dal bacino di attrazione nel quale si trova inizialmente.